ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Mario Ohlberger
Dr. Andreas Dedner
Dr. Bernard Haasdonk

Freiburg, 2.5.2006

Übung zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

SS 2006 – Blatt 1 (Abgabe: 9.5.2006 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Quadraturen auf Dreiecken) (4 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\hat{T}$ das Referenzdreieck. Zeigen Sie, dass die folgenden Quadraturen auf angegebenen polynomialen Funktionenräumen exakt sind:

a) $\hat{w}_1 = \frac{1}{2}$ und $\hat{\mathbf{x}}_1 := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ auf $P_1(\hat{T})$

b) $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3) := (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ und $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3) := \big((\frac{1}{2}, 0)^T, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (0, \frac{1}{2})^T\big)$ auf $P_2(\hat{T})$

c) $(\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3, \hat{w}_4) := (\frac{25}{96}, \frac{25}{96}, \frac{25}{96}, -\frac{9}{32})$ und
$(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3, \hat{\mathbf{x}}_4) := \big((\frac{3}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})^T, (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T\big)$ auf $P_3(\hat{T})$

Aufgabe 2: (Viereck-Gitter) (4 Punkte)

Wir betrachten das Referenzquadrat $\hat{T} := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ für Vierecksgitter, dessen Ecken mit $\hat{\mathbf{p}}_0 = (0,0)^T, \hat{\mathbf{p}}_1 = (1,0)^T, \hat{\mathbf{p}}_2 = (0,1)^T$ und $\hat{\mathbf{p}}_3 = (1,1)^T$ bezeichnet sind. Es sei $Q_s(\mathbb{R}^n) := \operatorname{span}\left\{\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} | d_i \in \mathbb{N}_0, d_i \leq s, i = 1, \ldots, n\right\}$ und $Q_s(\hat{T})$ die Menge dieser Funktionen eingeschränkt auf $\hat{T}$.

a) Geben Sie eine *nodale Basis* $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=0}^3$ für $Q_1(\hat{T})$ an, d.h. $\hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{p}}_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 0, \ldots, 3$.

b) Als Referenzabbildung auf ein beliebiges Viereck T mit Ecken $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2, i = 0, \ldots, 3$ reichen affine Abbildungen nicht aus, sondern es wird $F_T \in Q_1(\hat{T})^2$ gewählt. Zeigen Sie, dass F_T in diesem Raum eindeutig ist.

Aufgabe 3: (Statische Polymorphie in C++: Templates) (4 Punkte)

Gegeben ist die Datei `integrator.cc` auf der Webseite der Vorlesung. Dort sind zwei Klassen definiert, die verschiedene Funktionen repräsentieren. Gemeinsam ist allen eine Auswerte-Methode `evaluate(x, result)`. Weiter sind eine Menge von Quadraturen (auf dem Referenzdreieck) gegeben, die alle Methoden `npoints()`, `point(pnumber)` und `weight(pnumber)` besitzen.

a) Schreiben Sie eine Klasse `ReferenceElementIntegrator`, welche eine template Methode `integrate(function, quadrature, result)` besitzt. Diese Methode soll die Integration der Funktion `function` mit Hilfe der Quadratur `quadrature` berechnen und in `result` zurückgeben.

b) Bestimmen Sie durch eine geeignete `main`-Routine für alle Kombinationen der gegebenen Funktionen und Quadraturen die approximierten Integrale.

Aufgabe 4: (Dynamische Polymorphie in C++: Virtuelle Funktionen) (4 Punkte)

Gegeben ist das Programm `reference_elements.cc` auf der Webseite der Vorlesung. Das Hauptpgrogramm erstellt ein allgemeines Polygon in 2D, ein Referenz-Dreieck und ein Referenz-Quadrat und ruft verschiedene Methoden auf den Elementen auf. Die gewünschten Ausgaben des Programms sind im entsprechenden Kommentarblock gegeben.

a) Überlegen Sie ein auf Vererbung basiertes Klassenkonzept, welches die 3 Klassen (möglichst effizient) abbildet. Geben Sie insbesondere Vererbungs-Beziehungen an, welche Methoden als virtuell gewählt werden müssen, welche Member-Variablen in den Klassen deklariert werden und welche Funktionsargumente als const deklariert werden sollten.

b) Implementieren Sie ihr Konzept in einer Datei `reference_elements.hh`, so dass das Programm lauffähig ist und die gewünschten Ausgaben liefert. Hinweis: Die Bibliothek `math.h` stellt mathematische Funktionen zur Verfügung.