Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner Freiburg, 28.06.2007

Praktikum zur Vorlesung Numerik II

SS 2007 – Blatt 6

Abgabe: 19.07.2007, bis 14 Uhr (email)

Programmieraufgabe 6: (Laplace Problem (4 Punkte)

Berechnen Sie eine Finite-Differenzenapproximation an das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\triangle u(x,y) &= f(u(x,y),x,y) \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \ , \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Sei dazu $p_{ij} = (x_i, y_j) = (ih, jh)$ gegebene Gitterpunkte mit $0 \leq i, j \leq N$ und $h = \frac{1}{N}$. Nun suchen wir Werte u_{ij} mit $u_{ij} \approx u)x_i, y_j)$. Dazu benutzen Sie folgende Approximation an $\triangle u(x_i, y_j)$ für die p_{ij} im inneren von Ω:

$$\triangle u(x_i,y_j) \approx \frac{1}{h^2}(u_{(i-1)j} - 2u_{ij} + u_{(i+1)j} + u_{i(j-1)} - 2u_{ij} + u_{i(j+1)})$$

und $f(u(x,y),x,y) = f(u_{ij}, x_i, y_j)$. Für die $p_{ij} \in \partial\Omega$ haben Sie die ganz einfache Gleichung $u_{ij} = g(p_{ij})$.
Um das ganze auf ein Nullstellenproblem zu überführen, nummerieren Sie die Punkte p_{ij} geeignet, so dass sie einen Vektor $(p_k)_{0\leq k\leq N^2}$ erhalten. Nun suchen wir einen Lösungsvektor $U = (u_k)_{0\leq k\leq N^2}$ mit $u_k \approx u(p_k)$. Aus der Approximation an $\triangle u(p_k)$ für p_k im inneren von Ω und der Gleichung $u_{ij} = g(p_{ij})$ sonst erält man eine Matrix A und von der rechten Seite f eine nicht Lineraität $F(U) = (F_k(U))_{0\leq k\leq N^2}$ mit $F(U)_k = f(u_k, p_k)$ für p_k im inneren von Ω und $F(U)_k = 0$ sonst. Sie erhalten also ein Nullstellenproblem der Form

$$H(U) = 0 \quad \text{mit} \quad G(U) := F(U) + AU$$

der Grösse N^2, welches Sie mit dem Newton-Verfahren lösen können. Dazu benötigen Sie im jeden Newton Schritt die Lösung der linearen Gleichung $DH(U^n)\delta^n = H(U^n)$ für U^n gegeben. Zur Lösung benutzen Sie das cg-Verfahren. Es ist $DH(U) = DF(U) + A$ und $DF(U)$ hat Diagonalgestalt. Beachten Sie, dass A pro Zeile nur sehr wenig Einträge ungleich Null enthält und daher die Matrix $DH(U)$ nicht aufgestellt werden sollte. Für das cg Verfahren benötigen Sie nur die Multiplikation $y = (DF(U)+A)x$ für gegebenes x und dies ist leicht direkt auszurechnen.

Test: Als Fehler berechnen Sie $\max_{0\leq k\leq N^2} |u(p_k) - u_k$ und bestimmen Sie für verschiedene Werte von h den EOC. Mögliche Ansätze für f und g:

1. $g \equiv 0$ und $f(u,x,y) = 4\pi^2(l^2+k^2)u$. Die Lösung ist dann $u(x,y) = \sin(2\pi kx)\sin(2\pi ly)$ für $k, l \in \mathbb{N}$ beliebig.

2. $f \equiv 0$ und $g(x,y) = \cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)$ mit Lösung $u(x,y) = \cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)$.

Diese beiden Probleme sind linear (da f unabhängig ist von u). Zur Lösung brauchen Sie also kein Newton Verfahren - Implementieren Sie das Lösungsverfahren doch schon mal bis zum 05.07!

Weitere Beispiele kommen noch...