Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M. Nolte

09.07.2007

Übung zur Vorlesung

Numerik II

SS 2007 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 16.07.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $a > 0$ und $f \in C^0([0,1])$ soll die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u'' + au' &= f \quad \text{in }]0,1[, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

diskretisiert werden. Dazu sei $h > 0$ mit $Nh = 1$ und sei $x_j = jh$. Approximiere u' durch

(a) die zentrale Differenz $\frac{u(x_{j+1})-u(x_{j-1})}{2h}$,

(b) die Rückwärtsdifferenz $\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}$.

Stelle die linearen Gleichungsysteme auf und untersuche, ob die hinreichenden Kriterien für die Konvergenz des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens erfüllt sind, d.h. ob die Matrix irreduzibel und (in einer Zeile streng) diagonaldominant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $h > 0$ mit $Nh = 1$ und sei $x_j = jh$. Zeige, dass die stetigen, stückweise linearen Funktionen in $H^{1,2}(]0,1[)$ enthalten sind, d.h.

$$\left\{ f \in C^0([0,1]) | f|[x_{j-1}, x_j] \in \mathbb{P}_1 \right\} \subset H^{1,2}(]0,1[).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $u \in H^{1,2}(]a,b[)$ und $f \in L^1(]a,b[)$. Für alle $\varphi \in C^\infty([a,b])$ gelte

$$\int_a^b [u'\varphi' + (u+2)\varphi] = \varphi(a)u(a) + \varphi(b) + \int_a^b f\varphi.$$

Berechne die Randbedingungen, die u in a und b erfüllt, falls $u \in C^2([a,b])$ ist.

Aufgabe 4 (Schießverfahren) (4 Punkte)

Um das Randwertproblem

$$u'' = 100u, \qquad u(0) = 1, \qquad u(3) = e^{-30}$$

zu lösen, betrachte das Anfangswertproblem

$$u_s'' = 100u, \qquad u_s(0) = 1, \qquad u_s'(0) = s.$$

(a) Berechne die Lösung u_s des Anfangswertproblems und bestimme ein $\bar{s}$ mit $u_{\bar{s}}(3) = e^{-30}$.

(b) Vergleiche $u_{\bar{s}}(3)$ mit $u_{\bar{s}(1+\epsilon)}$ und beurteile, ob das Schießverfahren für das obige Randwertproblem geeignet ist.