ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 13.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 9

Abgabe: Montag, 20.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Interpolation) (4 Punkte)
Berechnen Sie zu $f(x) = \sin(x)$ Interpolationspolynome p_1, p_2 mit folgenden Eigenschaften:

a) $p_1(0) = f(0), \qquad p_1(\pi/2) = f(\pi/2), \qquad p_1(\pi) = f(\pi),$

b) $p_2(\pi/2) = f(\pi/2), \qquad p_2'(\pi/2) = f'(\pi/2), \qquad p_2''(\pi/2) = f''(\pi/2).$

Skizzieren Sie die Polynome p_1 und p_2, sowie die Funktion f im Intervall $[0, \pi]$.

Aufgabe 2: (Lagrange–Interpolation) (4 Punkte)
Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $y_1 < y_0, y_1 < y_2, x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h > 0$.

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige quadratische Lagrange–Interpolationspolynom ein eindeutig bestimmtes Minimum in einem Punkt x_* hat.

b) Geben Sie eine Formel für x_* an und zeigen Sie, dass gilt $|x_* - x_1| \leq \frac{h}{2}$.

Aufgabe 3: (Hermite–Interpolation) (4 Punkte)
Seien $x_1 < x_2 < x_3, f \in C^4([x_1, x_3])$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein Polynom p vom Grad ≤ 3 mit der Eigenschaft

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \quad \text{und} \quad p'(x_2) = f'(x_2).$$

b) Für alle $x \in [x_1, x_3]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{||f^{(4)}||_\infty}{4!} |\omega(x)|$$

wobei $\omega(x) := (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

(Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, dass die Ableitung h' von $h(z) := (f(x) - p(x))\omega(z) - (f(z) - p(z))\omega(x)$ vier disjunkte Nullstellen hat.

Aufgabe 4: (Birkhoff–Interpolation) (4 Punkte)
Finden Sie ein Polynom minimalen Grades, so dass

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p'(1/2) = 2$$

ist (mit Begründung zum minimalen Grad!).