Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 6.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 8

Abgabe: Montag, 13.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Modifizierte Newtonverfahren) (4 Punkte)

Zur Berechnung von $\sqrt(a), a > 0$ kann man das Newtonverfahren einsetzen, z.B. mit $f_0(x) = x^2 - a$ oder mit $f_1(x) = \frac{a}{x^2} - 1$. Sei Φ_i die zugehörige Iterationsfunktion zu f_i $(i = 0, 1)$. Betrachten Sie die Iterationsfunktion Φ_s, die durch Linearkombination von Φ_0, Φ_1 entsteht, d.h. $\Phi_s(x) = (1 - s)\Phi_0(x) + s\Phi_1(x)$.

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren $x^{(k+1)} = \Phi_s(x^{(k)})$ mindestens quadratisch gegen $\sqrt(a)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass es ein s_a gibt für das das Verfahren kubisch (von 3. Ordnung) konvergiert. Dabei sollte s_a nur von a, nicht aber von $\sqrt(a)$ abhängen.

Aufgabe 2: (Modifizierte Newtonverfahren) (4 Punkte)

Konstruieren Sie ein Iterationsverfahren basierend auf dem Newtonverfahren, welches $x^* = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ berechnet ohne eine Division durchzuführen und bestimmen Sie die genaue Konvergenzordnung des Verfahrens. Bestimmen Sie für $x^* \in [10^{-2}, 1]$ ein ρ, so dass das Verfahren quadratisch konvergiert in $B_\rho(\frac{1}{a})$.

Aufgabe 3: (Modifizierte Newtonverfahren) (4 Punkte)

Es seien $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}, f \in C^{k+1}(I)$. f habe in $\xi \in (a, b)$ eine k-fache Nullstelle, d.h. $f(\xi) = f'(\xi) = ... = f^{(k-1)}(\xi) = 0,\ f^{(k)}(\xi) \neq 0$.
Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - k \cdot \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

quadratisch gegen ξ konvergiert, falls x_0 genügend nahe bei ξ gewählt wird.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k$, mit $a_n \neq 0, a_o = 1$. Sei weiter x^* eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$0 < |x^*| \leq \min\{A, B, C\}$$

mit $A := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $B := 1 + \max_{1\leq k\leq n} |a_k|$, $C := 2 \max_{1\leq k\leq n} |a_k|^{1/k}$.
(Hinweis: Da $B \geq 1$ ist $\min\{A, B, C\} \geq 1$ und die Behauptung für $x^* \in (0, 1)$ trivial erfüllt.)

ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 6.12.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 20.12.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 4: (Nullstellensuche) (4 Punkte)

Implementieren Sie das Intervallhalbierungsverfahren (IV), das Sekantenverfahren (SV) und das Newtonverfahren (NV) zur Nullstellenbestimmung von $f : I \to \mathbb{R}$ mit geigneten Abbruchkriterien.

Wenden Sie die Verfahren zur Wurzelbestimmung an, indem Sie $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ setzen. Verwenden Sie beim Halbierungsverfahren $[a_0, b_0] = [1, 2]$, beim Sekantenverfahren sei $x_0 = 1, x_1 = 2$ und beim Newtonverfahren $x_0 = 1$.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen der Toleranz für das Abbruchkriterium und Abfrage, welches Verfahren verwendet verden soll.

b) Berechnung des Ergebnisses.

c) Ausgabe des Ergebnisses, der Anzahl der Iterationen und des absoluten Fehlers.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

TOL	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}
Verfahren	IV	SV	NV	IV	SV	NV