



Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 29.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 7

Abgabe: Montag, 6.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Relaxationsverfahren) (4 Punkte)

A sei eine $(n \times n)$ -Matrix mit $A = L + D + R$, $D = \mathbb{I}$. Daraus ergibt sich für die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens $G := -(L + R)$, d.h. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + b - Ax^{(k)}$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Die Eigenwerte λ_l von G seien reell und es gelte $-1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei das Relaxations-Verfahren durch die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)})$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ bestimmt, woraus sich die Iterationsmatrix $G(\omega) = (1 - \omega)\mathbb{I} - \omega(L + R)$ mit $G(1) = G$ ergibt.

- Zeigen Sie, dass $G(\omega)$ die Eigenwerte $\mu_l = 1 - \omega + \omega\lambda_l$, $l = 1, \dots, n$ besitzt.
- Bestimmen Sie ω_0 so, dass der Spektralradius von $G(\omega_0)$ minimal wird.
- Zeigen Sie, dass der Spektralradius von $G(\omega_0)$ für $\lambda_1 \neq -\lambda_n$ kleiner als der Spektralradius von $G(1)$ ist. (Hinweis: Für festes ω gilt $\max_{l=1, \dots, n} \{|1 - \omega + \omega\lambda_l|\} = \max\{|1 - \omega + \omega\lambda_1|, |1 - \omega + \omega\lambda_n|\}$. Für festes ω ist $f_\omega(\lambda) := 1 - \omega + \omega\lambda$ als Funktion von λ eine Gerade, die im Punkt $\lambda = 1$ den Wert 1 hat. ω_0 ergibt sich aus der Bedingung $f_\omega(\lambda_1) = -f_\omega(\lambda_n)$.)

Aufgabe 2: (Intervallschachtelung und Newton Verfahren) (4 Punkte)

Sei $f(x) = \text{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $x \in I := (1, 2)$. Die einzige Nullstelle von f in I ist $\pi/2$.

- Berechnen Sie die Nullestelle von f mit der Intervallschachtelung (6 Iteration).
- Berechnen Sie die Nullestelle von f mit dem Newton Verfahren (2 Iteration).
- Vergleichen Sie die absoluten Fehler von a) und b).

Aufgabe 3: (Newton Verfahren) (4 Punkte)

Es sei $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ ein Polynom mit n reellen Nullstellen $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_n$. Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x^{(0)} > \xi_1$ monoton gegen ξ_1 konvergiert.

Aufgabe 4: (Sekantenverfahren) (4 Punkte)

Sei $I = [a, b]$, $f \in C^2(I)$, $|f'(x)| \geq m_1 > 0$, $|f''(x)| \leq M_2$ für alle $x \in I$ und $C := \frac{M_2}{2m_1}$. Dann besitzt f in I genau eine Nullstelle ξ . Die Iteration des Sekantenverfahrens ist gegeben durch

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}).$$

Seien $x^{(0)}, x^{(1)} \in I$ mit $C|x^{(0)} - \xi|, C|x^{(1)} - \xi| \leq q < 1$. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ξ konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst $|x^{(k+1)} - \xi| \leq C|x^{(k)} - \xi| |x^{(k-1)} - \xi|$.)