ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 22.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 6

Abgabe: Montag, 29.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (GSV und ESV) (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Was ist die Lösung des linearen Gleichungssystems?

b) Berechnen Sie die Iterationsmatrizen G und E des Gesamtschrittverfahrens, bzw. des Einzelschrittverfahrens ($G := -A_D^{-1}(A_L + A_R), E := -(A_D + A_L)^{-1}A_R$).

c) Berechnen Sie $||G||_\infty$ und $||E||_\infty$.

d) Es sei der Startvektor $x^{(0)} = (0,0,0)^\top$ gegeben. Berechnen Sie die Iterierten $x^{(1)}, x^{(2)}$ und $x^(3)$ für die beiden Verfahren.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann zerlegbar ist, wenn es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$ mit $1 \leq k \leq n-1$.

b) Überlegen Sie sich wie man mit Hilfe von a) einen Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit zerlegbarer Matrix A angeben kann.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bei der Diskretisierung der Randwertaufgabe $u''(x) = f(x), x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ erhält man ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren und das Einzelschrittverfahren in diesem Fall konvergieren.

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 22.11.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 6.12.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 3: (4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x), x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem (vgl. Sie die resultierende Matrix mit Aufgabe 4 b))

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $u_0, u_{n+1} = 0$ gegeben sind und $u_i, i = 1, \ldots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind.

Implementieren Sie das Gesamtschritt– und das Einzelschrittverfahren zur Lösung dieser Randwertaufgabe, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = \sin(\pi x)$.
Benutzen Sie ein geeignetes Abbruchkriterium und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \ldots, u_n)$ und den maximalen Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.
b) Berechnung des Ergebnisses.
c) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

n	20	20	40	40
GSV / ESV	GSV	ESV	GSV	ESV