ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 8.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 4

Abgabe: Montag, 15.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Neumann Reihe) (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ stetig und linear mit $||T|| < 1$. Sei S definiert durch

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie (Hinweis: Verwenden Sie, dass $B(X, X)$ ein Banachraum ist.):

a) S ist stetig und linear.

b) $\mathbb{I} - T$ ist bijektiv und es ist $S = (\mathbb{I} - T)^{-1}$.

c) Es gilt $||(\mathbb{I} - T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||T||}$.

Aufgabe 2: (Störungssatz für lineare Gleichungssysteme) (4 Punkte)

Sei $A \in R^{n\times n}$ regulär und $||\cdot||$ eine induzierte Matrixnorm. Sei $\Delta A \in R^{n\times n}$ gegeben mit $||\Delta A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$ und $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $(A + \Delta A)x = b + \Delta b$. Zeigen Sie:

a) $A + \Delta A$ ist regulär.

b) Für den relativen Fehler gilt $\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta b||}{||b||} + \frac{||\Delta A||}{||A||} \right)$.

Dabei ist die Kondition von A definiert durch $\text{cond}(A) = ||A||\;||A^-1||$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 mit einer geeigneten Wahl von T.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Geben Sie eine invertierbare Matrix an, die keine LR–Zerlegung besitzt. (Begründung!)

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Berechnen Sie die LR–Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie dabei alle (wesentlichen) Zwischenschritte auf. Unter Ausnutzung der Zwischenergebnisse berechnen Sie die Lösung von $Ax = b$ für $b = (2, 1, 2, -1)^\top$.

ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 8.11.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 22.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 2: (4 Punkte)

Implementieren Sie das Gaussche Eliminationsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenpivotisierung (als Pivotelement wird also das betragsgrößte Element der jeweiligen Spalte gewählt). Führen Sie zuerst eine Äquilibrierung des Gleichungssystems durch:

Mit $D := \text{diag}(s_1, ..., s_n)$, wo $s_i := (\sum_{k=1}^n |A_{ik}|)^{-1}$, setze man

$$\tilde{A} = DA, \qquad \tilde{b} = Db. \tag{1}$$

Die durch die Pivotsuche entstandene Zeilenvertauschungen sollen nicht explizit ausgeführt werden. Stattdessen werden die Zeilenvertauschungen in einem Integer-Feld gespeichert.

Testen sie das Programm an folgendem Beispiel:

$$A_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1, ..., n, \qquad b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{i+j-1}, i = 1, ..., n.$$

Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ für $n = 10, 20$ und vergleichen Sie mit der exakten Lösung $x_i = (-1)^{i-1}, i = 1, ..., n$.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen der Dimension n und Abfrage, ob die Äquilibrierung (1) verwendet werden soll oder nicht.
b) Berechnung des Ergebnisses.
c) Ausgabe der berechneten Lösung $\tilde{x}$, des Fehlers $\tilde{x} - x$, wobei x die exakte Lösung ist, und des Residuums $A\tilde{x} - b$.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

n	10	10	20	20
Äquilibrierung	ja	nein	ja	nein