



Dr. Andreas Dedner  
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 29.10.2004

## Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 3

Abgabe: Montag, 8.11.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

**Aufgabe 1:** (Induzierte Matrixnorm) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass durch  $\|A\| = \max_{i,j=1}^n |a_{ij}|$  eine Norm auf  $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  definiert wird, welche durch kein paar Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  induziert wird.

**Aufgabe 2:** (Rundungsfehler) (4 Punkte)

$(x,y)$  sei die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= A \\ x + 1.01 y &= B. \end{aligned}$$

Berechnen sie die absoluten und relativen Fehler von  $x$ , bzw.  $y$ , wenn  $A = 1000$  und  $B = 1005$  bis auf einen relativen Eingabefehler  $\varepsilon$  gegeben sind, also  $\tilde{A} = A(1 + \varepsilon_1)$  und  $\tilde{B} = B(1 + \varepsilon_1)$  mit  $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq \varepsilon$ .

**Aufgabe 3:** (Fehlerfortpflanzung) (4 Punkte)

Ein radioaktiver Stoff zerfällt nach dem Gesetz

$$\text{Stoffmenge zur Zeit } t = m(t) = m(0)e^{-2t}.$$

Bekannt ist  $m(0) = 2.4$ . Gesucht ist  $m(2)$ . Leider haben Sie Ihren Taschenrechner nicht zur Hand und erinnern sich nur an die ersten beiden Stellen der Gaußschen Zahl  $e$ , also  $\tilde{e} = 2.7$ . Ist es sinnvoll, den gesuchten Wert mit der Hand auszurechnen, wenn Sie  $m(2)$  bis auf einen garantierten relativen Fehler von höchstens 1% benötigen?

**Aufgabe 4:** (Lösung von Integralgleichungen) (4 Punkte)

Sei  $g \in C^2(I)$  und  $k \in C(I \times I \times \mathbb{R})$  für  $I := [a, b]$ ,  $a < b$ . Betrachten Sie das Problem

$$\text{Finde } f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = g(x) + \int_a^x k(x, y, f(y))dy.$$

Der Integralkern  $k$  erfüllt die Bedingung:

$$\exists L \geq 0 : |k(x, y, z) - k(x, y, \bar{z})| \leq L|z - \bar{z}| \quad \forall x, y \in I, \quad \forall z, \bar{z} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Integralgleichung genau eine Lösung besitzt.

(Hinweis: Wenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz auf den Banachraum  $X = (C(I), \|\cdot\|)$  mit der gewichteten Supremumsnorm

$$\|v\| := \sup_{x \in I} \{ |e^{-\beta x} v(x)| \}$$

an, wobei  $\beta$  geeignet zu wählen ist.)