ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 25.10.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 2

Abgabe: **Dienstag, 2.11.2004, 9-11 Uhr,**
vor Raum 217, Hermann-Herder-Str. 10

Aufgabe 1: (Banachscher Fixpunktsatz) (8 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ abgeschlossene Teilmenge, $T : D \to D$ eine Kontraktion.
Zeigen Sie:

a) T hat genau einen Fixpunkt $\bar{u} \in D$.

b) Sei $u_0 \in D$ beliebig und $u_{k+1} := T(u_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} u_k = \bar{u}$.

c) $||\bar{u} - u_k|| \leq L||\bar{u} - u_{k-1}||$, für ein $L < 1$ und $k \in \mathbb{N}$, d.h. der Fehler nimmt monoton ab.

d) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L^k}{1-L}||T(u_0) - u_0||$ für ein $L < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ (A priori Fehlerschranke).

e) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L}{1-L}||u_k - u_{k-1}||$ für ein $L < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ (A posteriori Fehlerschranke).

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a) Zur Bestimmung von $\sqrt{a}$, $0 < a < 2$ setzt man $a = 1 - b$, $|b| < 1$, $\sqrt{1-b} = 1 - x$, woraus sich die Fixpunktaufgabe

$$x = g(x) := \frac{1}{2}(x^2 + b)$$

ergibt. Es ist $I := [-|b|, |b|]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Geben Sie den Kontraktionsfaktor L an.

b) Zur Lösung von $x + \ln x = 0$ stehen die folgenden Formeln zur Verfügung:

(i) $x = g_1(x) := -\ln x$,

(ii) $x = g_2(x) := e^{-x}$,

(iii) $x = g_3(x) := \frac{\beta x + e^{-x}}{\beta + 1}$, $\beta \geq 0$.

Welche der drei Funktionen sind in welchen Intervallen für das Fixpunktverfahren geeignet? Welches sind die Kontraktionsfaktoren?

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Im folgenden sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass $A^\top A$ stets symmetrisch und positiv semidefinit ist.

b) Sei A zusätzlich unitär. Zeigen Sie, dass $||A||_{2,2} = 1$ gilt.

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 25.10.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 8.10.2004, 11 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 1: (4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $0 < a < 2$. Verwenden Sie dazu die Fixpunktiteration aus Aufgabe 2 und brechen Sie die Iteration mit Hilfe der *a posteriori* Fehlerschranke aus Aufgabe 1 d) zu einer vorgegebenen Fehlertoleranz TOL ab.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen von a und TOL.
b) Berechnung des Ergebnisses.
c) Ausgabe des Näherungswertes für $\sqrt{a}$, der Anzahl der Iterationen, der berechneten *a posteriori* Fehlerschranke, sowie des absoluten und relativen Fehlers.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

a	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}
TOL	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}