ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 7.2..2005

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 15

Abgabe: Montag, 14.2.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Zentrale Differenzenquotienten) (4 Punkte)

Sei $f \in C^{2m+1}([a,b]), x \in (a,b)$ und Δ_f definiert durch

$$\Delta_f(h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

a) Zeigen Sie, dass es $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\Delta_f(h) = f'(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i h^{2i} + \mathcal{O}(h^{2m}).$$

b) Sei der Rundungsfehler behaftete Differenzenquotient $\tilde{\Delta}_f$ gegeben durch

$$\tilde{\Delta}_f(h) := \frac{\mathrm{rd}(f(x+h)) - \mathrm{rd}(f(x-h))}{2h} \quad \text{mit} \quad \left|\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\right| \leq \epsilon \quad \text{(Maschienengenauigkeit).}$$

Zeigen sie, dass gilt

$$|\tilde{\Delta}_f(h) - f'(x)| \leq \frac{||f^{(3)}||_\infty}{3!} h^2 + \frac{\epsilon}{h} ||f||_\infty.$$

Für welches h wird die rechte Seite der Abschätzung minimal?

Aufgabe 2: (Fehlerdarstellung nach Peano) (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fehlerdarstellung nach Peano für die folgenden Funktionale:

$$\begin{aligned} R_1(f) &:= \frac{f(h) - f(-h)}{2h} - f'(0), \quad f \in C^p(-h,h), \\ R_2(f) &:= \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} - f''(0), \quad f \in C^q(-h,h), \end{aligned}$$

Wählen Sie dabei $p, q \in \mathbb{N}$ geeignet.

Aufgabe 3: (Diskretes Lemma von Gronwall) (4 Punkte)

Seien $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positive Folgen und gelte

$$\varphi^N + \psi^{N-1} \leq \alpha^{N-1} + (1+\beta)\varphi^{N-1}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt :

$$\varphi^N + \sum_{n=0}^{N-1} \psi^n \leq (\varphi^0 + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n) e^{\beta N}.$$

Aufgabe 4: (Verbessertes Eulersches Polygonzugverfahren) (4 Punkte)

a) Das Anfangswertproblem (A) erfülle auf dem zulässigen Rechteckgebiet S die (L)– und (M)–Bedingung. Ferner sei $f \in C^2(S)$ und $y \in C^3(I)$. Zeigen sie für $(x,y) \in S$, dass die Funktion

$$\tau_h(x,y) := \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - f(x+\frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y(x))$$

für $h \to 0$ das folgende Abklingverhalten hat:

$$|\tau_h(x,y)| = \mathcal{O}(h^2).$$

b) Sei $I_h := \{x_j := jh |\ j = 0, ..., N, h = T/N\}$ eine Zerlegung von $[0,T]$. Folgern Sie unter der Voraussetzung aus a), dass das verbesserte Eulersche Polygonzugverfahren

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0, \\ u_{j+1} &= u_j + h_j f(x_j + \frac{h_j}{2}, u_j + \frac{h_j}{2} f(x_j, u_j), j = 0, ..., n-1, \end{aligned}$$

die Konvergenzordnung 2 hat, d.h. es gilt

$$\max_{j=0,...,N} |y(x_j) - u_j| = \mathcal{O}(h^2).$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil a) und das diskrete Lemma von Gronwall aus Aufgabe 3!