ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 31.1.2005

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 14

Abgabe: Montag, 7.2.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Gaußsche Quadraturformel) (4 Punkte)

Sei $\omega \in L^1(I)$ eine zulässige Gewichtsfunktion, $p_n, n \in \mathbb{N}$, seien bezüglich $(\cdot,\cdot)_\omega$ orthogonale Polynome mit $p_n \in P_n$. Q_n sei die zugehörige Gaußsche Quadraturformel und $p \in P_{2n+1}$ erfülle in den Nullstellen von p_{n+1} Hermitesche Interpolationsbedingungen. Zeigen sie für $f \in C^{2n+2}(I)$:

$$Q_n(f) = Q_n(p) = I(p)$$

und folgern Sie, dass für einen Zwischenwert $\xi \in I$ gilt:

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!}\Big(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Geben Sie zur Gewischtfunktion $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf dem Interval $[-1,1]$ orthogonale Polynome $p_n \in P_n$ bezüglich $(\cdot,\cdot)_\omega$ an für $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass p_{n+1} folgende Nullstellen hat:

$$x_k^{(n)} := \cos\Big(\frac{(k+1)\pi}{n+2}\Big), k = 0, ..., n.$$

Aufgabe 3: (Restgliebabschätzung für die Simpson-Regel) (4 Punkte)

Sei $f \in C^4([a,b]), a < b$. Sei $S(f)$ die Simpson-Regel zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass folgende Restgliedgleichung für ein $\xi \in [a,b]$ gilt:

$$I(f) - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\xi).$$

Zeigen Sie weiter, dass für die zusammengesetzte Simpson-Regel $S_h(f)$ mit einem $\xi \in [a,b]$ gilt:

$$|I(f) - S_h(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 ||f^{(4)}||_\infty.$$

Aufgabe 4: (Integration in 2D) (4 Punkte)

Sei $h > 0$. Definiere das Dreieck T durch

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq h\}$$

und definiere weiter $a_1 := (0,0), a_2 := (0,h), a_3 := (h,0), s := (h/3, h/3)$.

a) Berechnen Sie Gewischte $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$, so dass durch die Quadraturformel

$$I_h(f) := \sum_{i=1}^{3} \omega_i f(a_i) \approx I(f) := \int_T f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Polynome ersten Grades (in zwei Variablen) exakt integriert werden.

b) Zeigen Sie, dass es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$I(p) = \omega p(s)$$

für alle Polynome ersten Grades.

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 31.1.2005

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 14.2.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 7: (Zusammengesetzte Quadraturen) (4 Punkte)
Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel (T_h), Simpsonregel (S_h) und Zwei-Punkt Gaußquadratur (G_h) auf dem Interval $[0,1]$, $h := \frac{1}{N}$, $x_k := kh$. Die experimentelle Konvergenzordnung $EOC(e_{H\to h})$ für den Fehler $e_h := |I(f) - I_h(f)|$, $I_h = T_h, S_h, G_h$ ist definiert durch

$$EOC(e_{H\to h}) := \log\left(\frac{e_H}{e_h}\right) / \log\left(\frac{H}{h}\right).$$

Berechnen Sie näherungsweise $I(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ mit T_h, S_h, G_h zu $N = 16, 32, 64, 128$.
Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen von N.
b) Berechnung des Ergebnisses $I_h(f)$.
c) Ausgabe der Ergebnisse $I_h(f)$ und der Konvergenzordnungen $EOC(e_{2h\to h})$.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen der Romberg-Quadratur aus Programmieraufgabe 8 und den theoretischen Resultaten aus der Vorlesung.