ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 24.1.2005

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 13

Abgabe: Montag, 31.1.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Periodische Splineinterpolation) (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Delta = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ und $y_0, ..., y_n$ mit $y_n = y_0$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Für n ungerade existiert genau ein $p \in S^{2,1}_{\Delta}$ mit $p(x_k) = y_k$ und $p'(a) = p'(b)$.

b) Für n gerade existiert i. A. kein $p \in S^{2,1}_{\Delta}$ mit $p(x_k) = y_k$ und $p'(a) = p'(b)$.

Aufgabe 2: (Splineinterpolation) (4 Punkte)
Sei $f(x) = \sqrt{x}, \Delta = \{0 = x_0 < ... < x_n = 1\}$ und $s \in S^{1,0}_{\Delta}$ der lineare interpolierende Spline für f auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für $h = \frac{1}{n}$ gilt:

a) $||f - s||_{\infty} \geq \frac{1}{4}\sqrt{h}$, falls $x_k = kh$ ist,

b) $||f - s||_{\infty} \leq \frac{1}{2}h^2$, falls $x_k = (kh)^4$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass im Maximum $f' - s' = 0$ gelten muss.

Aufgabe 3: (Interpolationsquadratur) (4 Punkte)
Geben Sie die Interpolationsquadraturformel auf $C([a,b])$ für die Gewichtsfunktion $w = 1$ und die Stützstellen

$$x_j = a + (j+1)h, \quad 0 \leq j \leq n, \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

für $n = 3$ an.

Aufgabe 4: (Interpolationsquadratur) (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\omega \in \mathbb{R}$, so dass für alle $p \in P_1$ gilt $\omega p(-1) + \omega p(1) = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$.

b) Bestimmen Sie $\omega, x_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $p \in P_3$ gilt $\omega p(-x_0) + \omega p(x_0) = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$.