



Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 17.1.2005

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 12

Abgabe: Montag, 24.1.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Schnelle Fouriertransformation)

(4 Punkte)

Bestimmen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom zu $f(x) := x$ auf $[0, 2\pi)$ zu den Stützstellen $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k = 0, \dots, 3$, mittels schneller Fouriertransformation. Fertigen Sie eine Skizze des Interpolationspolynoms an.

Aufgabe 2: (Gaußelimination für tridiagonale Matrizen)

(4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Tridiagonalmatrix, d.h.

$$A = \text{tridiag}(b_i, a_i, c_i) := \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Es gelte

$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1| > 0, \\ |a_i| &\geq |b_i| + |c_i|, b_i \neq 0, c_i \neq 0, 2 \leq i \leq n-1, \\ |a_n| &> |b_n| > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- a) Die durch $\alpha_1 := a_1, \gamma_1 := c_1 \alpha_1^{-1}$ und durch $\alpha_i := a_i - b_i \gamma_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$, $\gamma_i := c_i \alpha_i^{-1}$ für $2 \leq i \leq n-1$ definierten Zahlen genügen den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |\gamma_i| &< 1, 1 \leq i \leq n-1, \\ 0 &< |a_i| - |b_i| < |\alpha_i| < |a_i| + |b_i|, 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- b) A besitzt die LR -Zerlegung $A = LR$ mit $L = \text{tridiag}(b_i, \alpha_i, 0)$, $R = \text{tridiag}(0, 1, \gamma_i)$.
- c) A ist regulär.
- d) Die Anzahl der arithmetischen Operationen zur Berechnung der Zerlegung $A = LR$ und zur Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe dieser Zerlegung ist $\mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 3: (B-Splines - Basis der Splineräume)

(1+3+4 Punkte)

Für eine monoton nicht fallende Knotenfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, d.h. $t_{i-1} \leq t_i \leq t_{i+1}$, mit $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} t_i = -\infty$ seien die *B-Splines* $B_{ik} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad k rekursiv definiert durch:

$$B_{i0} := \begin{cases} 1, & t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$B_{ik} := \omega_{ik}(x)B_{i,k-i}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x),$$

wobei

$$\omega_{ik}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}, & t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Berechnen und skizzieren Sie B_{i1} und B_{i2} für den Fall $t_i < t_{i+1} < t_{i+2} < t_{i+3}$.

b) Zeigen Sie, dass die B-Splines folgende Eigenschaften erfüllen:

i) $B_{ik}|_{[t_j, t_{j+1})} \in P_k$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0$,

ii) $\text{supp}(B_{ik}) = [t_i, t_{i+k+1}]$, falls $t_i < t_{i+k+1}$, $B_{ik} = 0$, falls $t_i = t_{i+k+1}$,

iii) $B_{ik} \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{ik}(x) = 1$ (Zerlegung der Eins).

c) Sei $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ Knotenfolge mit $t_i < t_{i+1}$ für alle i . Zeigen Sie:

i)

$$\frac{d}{dx} B_{ik}(x) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

ii) $B_{ik} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Hinweis: Verwenden Sie für i), dass für $k > 1$ gilt

$$\frac{\omega_{ik}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{\omega_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}, \frac{1 - \omega_{ik}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} = \frac{1 - \omega_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}.$$



Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 17.12.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 31.1.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 6: (Romberg-Integration - ein Extrapolationsverfahren) (4 Punkte)

Zu $f \in C([a, b])$, $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$ ist die zusammengesetzte Trapezregel gegeben durch

$$a(h) := \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh).$$

Die Folge $(a(h))_{h \rightarrow 0}$ approximiert das Integral $\int_a^b f(x) dx$ (Rombergintegration).

Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson Extrapolation eine Näherung von $a(0)$ indem Sie die Folge $h_k := (b - a)2^{-k}$, d.h. $N_k = 2^k$, und $q = 2$ verwenden.

Schreiben Sie dazu ein Programm zur Berechnung von a_{jn} , $j = 0, \dots, k$, $n = 0, \dots, j$. Legen Sie zwei Vektoren A_0, A_1 der Länge k an und berechnen Sie a_{kn} Zeilenweise indem Sie nur die Werte der aktuellen Zeile a_{kn} und der vorherigen Zeile $a_{k-1,n}$ speichern.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

- Einlesen von k .
- Berechnung des Ergebnisses.
- Ausgabe von $a_{j0}, a_{jj}, |a_{j0} - a(0)|, |a_{jj} - a(0)|$ für $j = 0, \dots, k$.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 1$ und $k = 5$.