ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 10.1.2005

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 11

Abgabe: Montag, 17.1.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Extrapolation) (4 Punkte)

Gegeben seien $h_k := 2^{-k}$, $a(h) := \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$, $f(h) := \frac{1-h}{2+h}$. Dann approximiert die Folge $(a(h_k))_{k\to\infty}$ die Ableitung $f'(0)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Richardson Extrapolation eine Näherung der Ableitung $f'(0)$ für $k = 0, 1, 2$ mit $q = 1$ und $q = 2$. Geben Sie dazu alle Werte a_{kn}, $n = 0, ..., k$ an (Neville Schema). Vergleichen Sie die Ergebnisse für $q = 1$ und $q = 2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Seien $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ gegebene reelle Folgen und setze $b_0 = 0, a_{-k} = a_k, b_{-k} = -b_k$ und $c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie. dass dann gilt:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

b) Seien $(c_k)_{k=-m}^{m}$, $c_k \in \mathbb{C}$ gegeben. Setze $a_k := c_k + c_{-k}$, $b_k := i(c_k - c_{-k}), k = 0, ..., m$. Zeigen Sie. dass dann gilt:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k, f_k) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k := 2\pi\frac{k}{n}$, $0 \le k \le n-1$. Es sei $p(x) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx}$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom. Für $s \le n-1$ sei

$$p_s := \sum_{j=0}^{s-1} c_j e^{ijx}.$$

Zeigen Sie: Unter allen trigonometrischen Polynomen $q_s \in T_{s-1}$ $(0 \le s \le n-1)$ minimiert gerade p_s die Fehlerquadratsumme

$$s(q_s) := \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q_s(x_k)|^2.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{P}_n := \{f = (f_k)_{k=-\infty}^{\infty} |\ f_k \in \mathbb{C}, f_{k+n} = f_k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der n-periodischen komplexen Zahlenfolgen. Auf $\mathcal{P}_n$ seien zwei Multiplikationen definiert durch

$$f \cdot g := (f_k g_k)_{k=-\infty}^{\infty} \qquad \text{(Hadamard Produkt)}, \tag{1}$$

$$f * g := \Big(\sum_{l=0}^{n-1} f_l g_{k-l}\Big)_{k=-\infty}^{\infty} \qquad \text{(Faltung)}. \tag{2}$$

Mit $\omega_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ sei ferner die diskrete Fourier-Transformation (DFT) $F_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definiert durch

$$g := F_n f \qquad \text{mit } g = (g_j)_{j=-\infty}^{\infty}, \quad g_j := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} f_k.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{P}_n$ ist ein n-dimensionaler linearer Raum und $F_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ ist ein linear und bijektiv.

b) $F_n^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ ist gegeben durch $F_n^{-1} = \frac{1}{n}\bar{F}_n$, wobei

$$(\bar{F}_n g)_j := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-jk} g_k \qquad \text{(konjugierte DFT)}$$

c) Sind $f, g \in \mathcal{P}_n$, so ist

$$\begin{aligned} F_n(f \cdot g) &= \frac{1}{n} F_n f * F_n g, \\ F_n(f * g) &= F_n f \cdot F_n g. \end{aligned}$$