Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 20.11.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 10

Abgabe: Montag, 10.1.2004, 15 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: (Dividierte Differenzen) (6 Punkte)

Sei $f \in C^0(a,b)$, $x_0, ..., x_n \in (a,b)$ paarweise disjunkt. Zeigen Sie:

a) Die dividierte Differenz $f[x_0, ..., x_n]$ ist eine symmetrische Funktion, d.h. ist $x_{i_o}, ..., x_{i_n}$ eine Permutation der Zahlen $x_0, ..., x_n$, so gilt $f[x_{i_o}, ..., x_{i_n}] = f[x_0, ..., x_n]$.

b) Sei $t \neq x_k$, $k = 1, ..., n$ fest gewählt und p das Interpolationspolynom von f an den Stellen $x_0, ..., x_n$. Dann gilt $f(t) - p(t) = f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$.

c) Ist $f \in C^n(a,b)$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f[x_0, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

Aufgabe 2: (Neville Schema) (5 Punkte)

Verwenden Sie die Polynominterpolation zur Berechnung von $\sqrt{7}$, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stellen $x = 1, 4$ und 9 interpolieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die dividierten Differenzen und stellen Sie damit die Newtonform des Interpolationspolynoms auf. Werten Sie das Polynom an der Stelle $x = 7$ aus.

b) Berechnen Sie den Wert des Inperpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$ mit Hilfe des Neville Schemas.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Neville Schemas den Wert des Inperpolationspolynoms an der Stelle $x = 7$, für den Fall das Sie eine weitere Stützstelle hinzunehmen, d.h. $x = 1, 4, 9$ und 16.

Aufgabe 3: (Trigonometrische Funktionen) (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für $\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gilt: $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{k-l})^j = \delta_{kl}$, für $0 \leq k.l \leq n-1$.

b) Seien $n, j \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $x_k := k\frac{2\pi}{n+1}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(jx_k) = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(jx_k) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } j \text{ durch } n+1 \text{ teilbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Hinweis: Verwenden Sie a) zum Beweis von b).

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 20.12.2004

Praktikum zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005

Abgabe: Montag, 17.1.2005, 15 Uhr (in der Vorlesung Numerik I)

Programmieraufgabe 5: (Interpolation) (4 Punkte)

Es sei $I := [-5, 5]$, und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Interpolationsstellen $x_i, i = 0, ..., n$ definiert durch

(A) $x_i := 5(-1 + \frac{2i}{n})$,

(B) $x_i := 5 \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$.

Schreiben Sie eine Prozedur, die zu den Daten $(x_i, f_i := f(x_i)), i = 0, ..., n$ und gegebenem x den Wert $p_n(x)$ des Interpolationspolynoms mit dem Neville-Schema berechnet.
Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

a) Einlesen von n, x und Abfrage, welche Interpolationsstellen ((A) oder (B)) verwendet werden sollen.
b) Berechnung des Ergebnisses.
c) Ausgabe des Ergebnisses, und des absoluten Fehlers $f(x) - p_n(x)$.

Testen Sie Ihr Programm mit $x = 4.63$ und folgenden Eingaben:

n	10	10	50	50	100	100
Interpolationsstellen nach	(A)	(B)	(A)	(B)	(A)	(B)