ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Dr. Andreas Dedner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 18.10.2004

Übung zur Vorlesung Numerik I

WS 2004/2005 – Blatt 1

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$–Matrix. Finden Sie optimale Konstanten C_1, C_∞, so dass gilt
a) $||Ax||_1 \leq C_1 ||x||_1$,
b) $||Ax||_\infty \leq C_\infty ||x||_\infty$.
c) Zeigen Sie, dass es für alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ eine Konstante C gibt, so dass gilt $||Ax|| \leq C||x||$.
(Hinweis: $||y||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||y||_\infty := \max_{i=1,..,n} |x_i|$.)

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Seien V, W Vektorräume und $A : V \to W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
a) A ist stetig,
b) A ist beschränkt,
c) A ist stetig in 0.
(Hinweis: A heißt beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, mit $||Ax||_W \leq C||x||_V$ für alle $x \in V$. A heißt stetig im Punkt $x \in V$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Für alle $y \in V$ mit $||x - y||_V \leq \delta$ gilt $||Ax - Ay)||_W \leq \varepsilon$.)

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Gibt es einen linearen Operator $A : V \to W$, der nicht beschränkt ist?
(Beweis oder Beispiel angeben!)