

Numerische Integration

Exercises

- (1) Man betrachte die Sinusfunktion im Intervall $\Omega := [0, \pi]$. Man berechne

$$\int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Nun wende man die Mittelpunktsregel, die Trapezregel und die Simpsonregel an, um die Approximation für das Integral zu berechnen. Man stelle nun eine nette Tabelle auf, in der man die Fehler zwischen der Approximation und Integral aufstellt. Was bemerkt man? Man begründe die Beobachtung. Man gebe eine geometrische Interpretation für die jeweiligen numerischen Integrationsmethoden. Daraufhin teile man das Intervall in 2 gleichgrosse Teilintervalle und wiederhole den Vorgang. Nun wiederhole man das alles mit 2 nicht gleichgrossen Intervallen. Man teile Ω in die Teilintervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{\pi}{6}, \pi]$. Man gebe wieder eine geometrische Interpretation.

- (2) Wenn man noch nicht genug habe, so betrachte man dasselbe Problem nochmal. Allerdings verwenden wir jetzt das Romberg-Schema. Man brauche dies nicht mit übermäßiger Freude anzugehen. Wir verwenden die Trapezregel als Anfangsintegration. Ausserdem soll zuerst über ganz Ω integriert werden, also $h = \pi$. Stelle die ersten drei Elemente der Spalte aus dem Romberg-Schema auf und werte diese aus. Stelle die zweite und dritte Spalte auf. Vergleiche wieder den Fehler zwischen exakter und numerischer Integration. Was fällt auf?

Skalarprodukt

Exercises

- (1) Gegeben seien die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zeige, daß die ersten drei Polynome im Intervall $\Omega := [-1, 1]$ bezüglich des $L^2(\Omega)$ -Skalarprodukts orthogonal sind. Bestimme den Normierungsfaktor für die ersten drei Polynome. Sei nun $f(x) = \tanh x$. Berechne das Skalarprodukt $a_n := (f, P_n)$ für $n = 0, 1, 2$. Für $n = 0$ sollte die Integration von Hand machbar sein. Für $n = 1, 2$ verwende eine geeignete numerische Integration. Wem ein geeignetes Program zur Verfügung steht, der lasse sich

$$f_h(x) := \sum_{i=0}^k a_i P_i(x)$$

als plot im Intervall Ω ausgeben für $k = 0, 1, 2$.