Newton Verfahren für reellwertige Funktionen

(1) Sei $f(x) := \tan x$, $x_0 = \frac{7}{2}$. Trage in einer Skizze die ersten drei Schritte des Newton-Verfahrens $x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ qualitativ ein. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge?

(2) Sei nun $x_0 = \frac{1}{2}$. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge nun?

(3) Sei nun $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Wie sieht die Folge jetzt aus?

(4) Begründe, warum das Newton Verfahren für alle $x \in \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ konvergiert.

Nochmal Newton

(1) Gegeben sei die Funktion $f(x) := e^x + x$. Zeige, daß die Funktion streng monoton wachsend ist. Bestimme mit Hilfe des Newton Verfahrens einen Näherungswert für die eindeutig bestimmte reelle Zahl a mit $f(a) = 2$. Starte mit dem Wert $x_0 = 3$.

(2) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Programmiere das Newton-Verfahren und bestimme die Nullstellen von $f(x)$ für verschiedene Startwerte $x_0 \in [-\varepsilon; \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ und verschiedene $n \in \mathbb{N}$. Als Abbruchskriterium des Verfahrens kann man z.B. die Fehlergrenze $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-8}$ wählen. Was beobachtet man?

Und wieder Newton, diesmal für Systeme (schon nicht ganz einfach)

(1) Mit dem Newton-Verfahren lassen sich auch Systeme nichtlinearer Gleichungen lösen. So suchen wir z.B. eine Approximation zum einem Schnittpunkt zweier Ellipsen:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^2 + 2x_2^2 - 4 & = & 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 - 4 & = & 0 \end{array}\right\} \quad F(X) \quad = 0$$

Vorgehensweise: Die Lösung sei X_*, d.h. zu lösen ist $F(X_*) = 0$. Führe eine Größe $H := X_* - X$ ein und setze diese in $F(X_*) = 0$ ein. Das ergibt $F(X + H) = 0$. Führe eine Taylorentwicklung durch und ignoriere alle Terme mit Ordnung größer als 2, dabei ist $F'(X)$ die Jacobimatrix von $F(X)$. Aus der Taylorentwicklung läßt sich eine Iterationsvorschrift für das Newton Verfahren gewinnen. Für die Konvergenz ist nicht ganz unwichtig, wie der Startwert X_0 gewählt wird. Verschiedene Startwerte werden unter Umständen zu verschiedenen Schnittpunkten führen oder garnicht konvergieren. Für Konvergenz zu einem bestimmten Schnittpunkt ist wichtig, daß $X_0 \approx X_*$. Dies kann man z.B. graphisch bestimmen. Man setze im ersten Versuch z.B. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.