

Nummerick für Angefangene

Gesamtschritt- oder Einzelschrittverfahren und dabei noch ein bisschen LR-Zerlegung

EXERCISE 0.1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Wie sieht die LR-Zerlegung der Matrix aus?
- (2) Löse das Gleichungssystem mit der LR-Zerlegung.
- (3) Wie sehen die Iterationsmatrizen zum GSV und ESV aus?
- (4) Zeige, daß das GSV und ESV konvergiert.

EXERCISE 0.2. Im folgenden untersucht man die Konvergenz der Iterationsverfahren für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme die Iterationsmatrix für das GSV und ESV.
- (2) Verwende den Satz von Gerschgorin, um die Konvergenz des GSV zu zeigen.

EXERCISE 0.3. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das reelle Gleichungssystem mit $b \in \mathbb{R}$ und

$$A = A(\alpha, \beta, \gamma) := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & \gamma \\ -\beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es Werte für α, β, γ für die

- (1) das GSV konvergiert, das ESV aber nicht? (Begründung!)
- (2) das ESV konvergiert, das GSV aber nicht? (auch begründen!)
- (3) Wenn ja, gebe Werte an, die entweder 1. oder 2. genügen.

EXERCISE 0.4. Und schon wieder haben wir ein Gleichungssystem. Welch ein Wunder. Und wieder soll man GSV und ESV anwenden. Einfach mit dem Verfahren, komponentenweise, nix mit Iterationsmatrix oder so.

$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 2$$

$$x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -2$$

$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3$$

Das kann man natürlich beliebig lang machen. Man vergleiche allerdings den Fehler $\left\| \mathbf{x}^{(k)} - (1, 1, 1)^T \right\|_1$ jeweils für das GSV und ESV für ein paar Schritte. Wer das programmieren will, der mache dies bis $k = 10$ und stelle eine nette Tabelle auf. Man nehme als Anfangsvektor $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.