

## Infoblatt der Selbsthilfegruppe für numerisch Geschädigte

### Banachscher Fixpunktsatz

Untersuche die Fixpunktgleichung  $x = \Phi(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $\Phi(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \sin^2 x$ .

- (1) Bestimme den Wertebereich von  $\Phi(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$ .
- (2) Zeige, daß  $\Phi$  eine Kontraktion in  $\mathbb{R}$  ist. Bestimme eine Kontraktionskonstante.
- (3) Zeige, daß  $\Phi$  in  $D = [0, \frac{\pi}{4}]$  alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
- (4) Zeige, daß  $\Phi$  in  $\mathbb{R}$  genau einen Fixpunkt besitzt.
- (5) Führe zwei Schritte der sukzessiven Approximation durch, dabei sei  $x_0 = 0$ .
- (6) Benutze die a-priori Abschätzung, um die Zahl der notwendigen Iterationen für eine Genauigkeit von  $\varepsilon$  bei dem in 5. begonnenen Iterationsverfahren in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  abzuschätzen.

### Und wieder Banach mit einem bißchen Newton

Definiere eine geeignete Iterationsabbildung  $\varphi$  zur Lösung des Systems

$$x_1 + x_2 = 1 - 2\varepsilon x_1^2$$

$$x_1 - x_2 = 1 - 2\varepsilon x_2^2.$$

Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die Existenz einer Lösung für hinreichend kleines  $\varepsilon$ .