ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 8.12.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 9

Abgabe: **Montag, 15.12.2003, 11 Uhr (in der Vorlesung)**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen sie, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$. Ein solches x heißt Fixpunkt von f.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie:

i) Für alle $a \in (0, 1)$ existieren die einseitigen Grenzwerte

$$f(a-) := \lim_{x \nearrow a, x \neq a} f(x) \qquad \text{und} \qquad f(a+) := \lim_{x \searrow a, x \neq a} f(x).$$

ii) Die Menge der Punkte $a \in [0, 1]$, in denen f unstetig ist, ist leer oder abzählbar.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) \neq 0, \text{ für ein } x \in (a, b) \Longrightarrow \exists \delta > 0 : f(y) \neq 0 \ \forall y \in \,]x - \delta, x + \delta[.$$

ii) Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann interpretiert werden als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Alle Folgen sind stetig.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) sind definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)), \qquad \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

Zeigen Sie, dass sinh und cosh stetige Funktionen sind und beweisen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Formeln gelten:

i) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$,

ii) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$,

iii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.