ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

**Abteilung für
Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 24.11.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 7

Abgabe: **Montag, 1.12.2003, 11 Uhr (in der Vorlesung)**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Sachverhalte gelten:

i) Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

ii) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

iii) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

i) Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \quad \Longleftrightarrow \quad x = \lambda\, y\,, \quad$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

ii) Zeigen Sie, daß durch $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist.

iii) Beweisen Sie, daß die 1−Norm $(||\,.\,||_1)$ äquivalent zur euklidischen Norm $(||\,.\,||_2)$ ist, d.h. es gilt:
$$m\,||x||_2 \leq ||x||_1 \leq M\,||x||_2, \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}^n.$$
Dabei hängen die Konstanten $m > 0$ und $M > 0$ nicht von x ab.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Sachverhalte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup a_n = \liminf a_n$.

ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Es gilt:
$$\limsup a_n = \sup H \qquad \text{sowie} \qquad \liminf a_n = \inf H.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Zeigen Sie:

i) $]0,1[$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ $(]0,1[\sim \mathbb{R})$.

ii) $]0,1[\, \cup \{1,2,3\} \sim \mathbb{R}$.

iii) Die Menge $\mathbf{I}$ der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.