ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 10.11.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 5

Abgabe: **Montag, 17.11.2003, 11 Uhr (in der Vorlesung)**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $0 < b_0 \leq a_0$. Zeigen sie, dass die durch

$$a_{n+1} := \frac{a_b + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

definierten Folgen gegen denselben Grenzwert, das sogenannte arithmetisch-geometrische Mittel von a_0 und b_0 konvergieren.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

i) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{n+1}{n}(-1)^n,$$

sowie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge, die gegen ihn konvergiert. (Beweisen Sie auch, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt!)

ii) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge? (Beweis)

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls a Häufungspunkt jeder Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$x_n := x_{n-1} + \frac{1}{10} x_{n-1}(x_{n-1} - 1).$$

Skizzieren Sie die Folge (x_n) für die Startwerte $x_0 = -1, -0.5, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2$ in einem (n, x_n)–Diagramm. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, welche Grenzwerte kommen in Frage? Warum ist dies kein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Grenzwertes.