



Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 3.11.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 4

Abgabe: Montag, 10.11.2003, 11 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1:

(3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} , und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Mittelwerte, definiert durch $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Aufgabe 2:

(7 Punkte)

i) Zeigen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := a, \quad a_1 := b \quad \text{und} \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass für alle $n \geq 2$ gilt $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_{n-1}a + b_n b)$, wobei die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv gegeben ist durch $b_1 = b_2 = 1$ und $b_n := b_{n-1} + 2b_{n-2}$.
- Zeigen Sie dann, dass gilt $b_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \forall n \in \mathbb{N}$.
- Zeigen Sie mit Hilfe von i), a) und b), dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3:

(3 Punkte)

Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} , so dass für alle Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. Zeigen Sie, dass dann $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist.

Aufgabe 4:

(3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $b_n := a_{2n}$. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen gelten und beweisen Sie Ihre Ergebnisse:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.