



Prof. Dr. Dietmar Kröner  
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 12.1.2004

## Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 12

Abgabe: Montag, 19.1.2004, 11 Uhr (in der Vorlesung)

**Aufgabe 1:** (Konvexkombination)

(4 Punkte)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Zeigen Sie:

- $f$  hat ein Maximum bezüglich  $[a, b]$  in mindestens einem der beiden Randpunkte  $a$  und  $b$ .
- Für alle  $x_i \in [a, b]$  und alle  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [a, b], \quad \text{und} \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

**Aufgabe 2:** (Konvergenz des Newton Verfahren)

(4 Punkte)

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

- Es gibt ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(\xi) = 0$ .
- Für gegebenes  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) > 0$  konvergiert das Newton Verfahren

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

monoton fallend gegen  $\xi$ .

**Aufgabe 3:**

(4 Punkte)

Die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch

$$S_k := \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$S_{2n} \geq \frac{n+1}{2}.$$

**Aufgabe 4:**

(4 Punkte)

Die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch

$$S_k := \sum_{i=1}^k z^i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Untersuchen Sie die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz für beliebige  $z \in \mathbb{C}$ .