



Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 22.12.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 11

Abgabe: Montag, 12.1.2004, 11 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \sinh(x), \quad f(x) = \operatorname{Arsinh}(x), \quad f(x) = \frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{(x + 2)^{5/2}}, \quad f(x) = x^{(x^x)}.$$

Aufgabe 2: (Regel von l' Hopital)

(4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $]a, b[$. Gelte weiter $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$, sowie eine der beiden Eigenschaften

a) $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$,

b) $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

Falls $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte stimmen überein. (Der Satz gilt auch, falls überall " $x \searrow a$ " durch $x \nearrow b$ ersetzt wird und/oder falls $a = -\infty$, oder $b = -\infty$ ist.)

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Berechnen Sie mit der Regel von l'Hopital die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Aufgabe 4: (Newton Verfahren)

(4 Punkte)

Das Newton Verfahren zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und deren Schnittpunkt mit der x -Achse als neuen Näherungswert x_1 zu benutzen und dann das Verfahren zu iterieren. Dies führt auf die Iterationsvorschrift

$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Skizzieren Sie das Verfahren für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 4$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Verfahren von Heron (Aufgabe 3, Blatt 6). Überlegen Sie (schriftlich), ob das Verfahren für beliebige Startwerte x_0 und beliebige differenzierbare Funktionen f , die eine Nullstelle haben konvergiert.

Aufgabe 5* (Zusatzaufgabe zum Punktesammeln):

(4 Punkte)

Wir breiten einen Stadtplan von Freiburg auf dem Boden des Rundbau-Hörsaals aus. Begründen Sie, dass es einen Punkt auf dem Stadtplan gibt, der genau dem Punkt darunter auf dem Boden entspricht. Geben Sie ein Verfahren an, wie man diesen Punkt näherungsweise finden kann.

Hinweis: Nehmen Sie das Stadtgebiet zur mathematischen Modellierung als (ebene) Teilmenge des \mathbb{R}^2 an.



Übung zur Vorlesung Analysis I
WS 2003/2004
Weihnachts-Trainingsblatt

Die folgenden Fragen sollen Ihnen helfen die wesentlichen Begriffe und Sätze der Vorlesung zu rekapitulieren. Sie sollten die in der Vorlesung und in der Übung aufgetretenen Begriffe, Definitionen und Sätze präzise formulieren und durch Beispiele illustrieren können. Auch die Beweisideen sollten Sie so gut kennen, dass Sie den gesamten Beweis nötigenfalls rekonstruieren können. Die Fragen sollen Ihnen lediglich als Leitfaden dienen und decken nicht den kompletten Umfang des relevanten Stoffes ab. Bitte nutzen Sie die Weihnachtspause zur Aufarbeitung des Stoffes, da dies für das weitere Verständnis der Vorlesung und auch für die anstehende Klausur von großem Vorteil für Sie sein wird.

1. Zeigen Sie: $\sqrt[3]{7}$ ist keine rationale Zahl.
2. Geben Sie die Definition der Binomialkoeffizienten an.
3. Wie lauten die Körperaxiome?
4. Was sagt die Bernoulli Ungleichung?
5. Wie lautet der Satz von Heine-Borel?
6. Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstrass?
7. Was versteht man unter einer ε -Umgebung eines Punktes?
8. Geben Sie eine beschränkte Folge an die nicht konvergiert.
9. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass der Quotient von zwei Nullfolgen konvergieren, aber auch divergieren kann.
10. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $\frac{7n^3-5n^2+8}{3n^3-2n}$, $\frac{(2n+1)^3-8n^3}{(2n+3)^2-4n}$.
11. Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach $[0, 1]$ hat einen Fixpunkt.
12. Wie lautet das Vollständigkeitsaxiom?
13. Geben Sie die Definition der Exponentialfunktion an.
14. Wie lautet das Intervallschachtelungsprinzip?
15. Untersuchen Sie die Folge $(\frac{i+1}{i})^i$ auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an.
16. Geben Sie eine Funktion an für die $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x)$ existieren und f nicht differenzierbar in 0 ist.

17. Geben Sie die Definition der Stetigkeit einer Funktion f im Punkt x an.
18. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x an.
19. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes: Jedes Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle.
20. Wie lautet der Mittelwertsatz?
21. Beweisen Sie die Ungleichung: $\sum_{j=1}^n x_j \leq \sqrt{n}(\sum_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{1}{2}}$.
22. Geben sie eine Menge an die weder abgeschlossen noch offen ist.
23. Sei p ein Polynom welches genau die Nullstellen 1, 2, 3, 4 besitzt mit jeweils einfacher Vielfachheit. Geben Sie das Polynom p explizit an.
24. Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?
25. Geben Sie eine Funktion an die stetig und monoton ist, aber nicht differenzierbar.
26. Geben Sie ein Lipschitz-stetige Funktion an, deren kleinste Lipschitz-Konstante gleich 2 ist.
27. Sei f eine auf $[0,1]$ stetige Funktion mit $f(0.5) \neq 0$. Zeigen Sie: Dann gibt es noch eine offene Menge $M \in [0, 1]$ mit $f \neq 0$ auf M .
28. Seien f und g stetige Funktionen auf $[0, 1]$. Ist dann auch $\frac{f}{g}$ stetig auf $[0, 1]$? Erläutern Sie Ihre Antwort durch ein Beispiel.
29. Was versteht man unter dem Grenzwert einer Funktion im Punkt x ?
30. Sei f eine auf $[0, 1]$ streng monoton fallende, stetige Funktion. Gibt es dann eine Funktion g mit der Eigenschaft $g(f(x)) = x$?
31. In der Vorlesung wurde gezeigt: Eine auf $I = [0, 1]$ stetige, streng monoton wachsende Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion. Wir nehmen nun an, dass f auf I auch differenzierbar ist. Ist dann auch die Umkehrfunktion differenzierbar? Gilt die Aussage für $I =]0, 1[$?
32. Was versteht man unter der Funktionalgleichung? Geben Sie diese an?
33. Erläutern Sie die Schritte, die zur Definition des Logarithmus erforderlich waren?
34. Geben Sie eine Funktion $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_1(0) \in \mathbb{R}^2$ an, die stetig auf $B_1(0)$ ist aber auf $\overline{B_1(0)}$ ihr Maximum nicht annimmt.
35. Stelle Sie fest, ob der Grenzwert der Funktion $\frac{3x^2 - 7\sqrt{x}}{4x - 2x^3}$ existiert.
36. Sei f eine auf $I = [0, 1]$ stetig differenzierbare Funktion mit $f(0)=0$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $|f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f'(x)| |x|$.
37. Sei f eine auf $I = [0, 1]$ stetig differenzierbare Funktion mit $f \neq 0$ auf I . Ist dann auch $\frac{1}{f}$ differenzierbar? Wie sieht ggf. die Ableitung aus?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in's neue Jahr wünschen Ihnen

Dietmar Kröner & Mario Ohlberger