



Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 15.12.2003

Übung zur Vorlesung Analysis I

WS 2003/2004 – Blatt 10

Abgabe: Montag, 22.12.2003, 11 Uhr (in der Vorlesung)

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Beweisen Sie, daß auf \mathbb{R}^n je zwei Normen $\|\cdot\|, \|\|\cdot\|\|$ äquivalent sind, d.h. es gibt Konstanten $m, M > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$m \|\|\cdot\|\| \leq \|\cdot\| \leq M \|\|\cdot\|\|.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass es ausreicht die Äquivalenz einer beliebigen Norm zur euklidischen Norm zu zeigen und beweisen Sie dieses.)

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die auf ganz \mathbb{R} definierte Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, die definiert ist durch

$$\operatorname{Arsinh}(x) := \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Hier bezeichnet \log den natürliche Logarithmus.

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Für eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist die Abstandsfunktion zu M gegeben durch

$$\operatorname{dist}_M(x) := \inf_{m \in M} |x - m|.$$

Zeigen Sie, dass dist_M Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante Eins ist, d.h.

$$|\operatorname{dist}_M(x) - \operatorname{dist}_M(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen sie weiter, dass $M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{dist}_M(x) = 0\}$ genau dann gilt, wenn M abgeschlossen ist.

Aufgabe 4: (Banach'scher Fixpunktsatz)

(4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und nicht leer. Weiter sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (Kontraktion) und gelte $f(x) \in D$ für alle $x \in D$ (Selbstabbildung). Zeigen Sie, dass dann f genau einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt genau ein $x \in D$ mit $f(x) = x$.

(Hinweis: Zum Beweis der Existenz eines Fixpunktes betrachten Sie für gegebenes $x_0 \in D$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch die Fixpunktiteration $x_n := f(x_{n-1})$ und zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D konvergiert.)