Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 14.6.2004

Übung zur Vorlesung Analysis II

SS 2004 – Blatt 8

Abgabe: **Montag, 21.6.2004, 11 Uhr (in der Vorlesung)**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{dx}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Wir Definieren

$$\mathrm{div} f(x) := \sum_{i=1}^{3} \partial_i f_i(x), \qquad \mathrm{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:
a) div (rot f) $= 0$, b) div (grad f_i) $= \Delta f_i$, $i = 1, 2, 3$,
c) rot (rot f) $=$ grad (div f) $- \Delta f$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:
a) Für $k \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $\omega = c||k||_2$ ist $f(x,t) := g(\langle k, x\rangle - \omega t)$, $\langle k, x\rangle := \sum_{i=1}^n k_i x_i$ eine Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 - c^2\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^n$ (*ebene Welle*).

b) Für $n = 3$ ist $f(x,t) := \frac{1}{||x||_2}\, g(||x||_2 - ct)$ eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^3$ (*Kugelwelle*).

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei

$$f(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-||x||_2^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:
a) f löst die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t f(x,t) - \Delta f(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$.

b) Für alle $t > 0$ wird durch die Vorschrift $(T(t))(x) = f(x,t)$ ein Element $T(t) \in B(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ definiert, und es gilt $\lim_{t\to\infty} ||T(t)||_\infty = 0$.