ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 26.4.2004

Übung zur Vorlesung Analysis II

SS 2004 – Blatt 2

Abgabe: **Montag, 3.5.2004, 11 Uhr (in der Vorlesung)**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Für $p \in [1, \infty)$ ist die p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$|| \cdot ||_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), ||x||_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \Big)^{1/p}.$$

Weiter definieren wir für $p = \infty$

$$||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für $p = 1$ und $p = \infty$, dass $|| \cdot ||_p$ eine Norm ist und skizzieren Sie die Einheitskugeln um den Nullpunkt für $p = 1, 2$ und $p = \infty$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und α der Winkel zwischen a und b. Zeigen sie, dass gilt:

$$\frac{\langle a, b \rangle}{||a||_2 \; ||b||_2} = \cos(\alpha).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $C^0(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

a) Für $f \in C^0(I)$ definieren wir $||f||_1$ durch $||f||_1 := \int_I |f(x)| \mathrm{dx}$. Zeigen Sie, dass $|| \cdot ||_1$ eine Norm auf $C^0(I)$ ist.

b) Seien $f, g \in C^0(I)$. Zeigen Sie, dass durch $\langle f, g \rangle := \int_I f(x) g(x) \mathrm{dx}$ ein Skalarprodukt auf $C^0(I)$ gegeben ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei l^1 der Raum der unendlichen Folgen und bezeichne e_i den i-ten Einheitsvektor in l^1, d.h. $(e_i)_k = 0$ für $i \neq k, k \in \mathbb{N}$ und $(e_i)_i = 1$. Wir betrachten die Teilemenge

$$K := \{e_i | i \in \mathbb{N}\} \subset l^1.$$

Auf l^1 ist die Supremumsnorm $|| \cdot ||_\infty$ gegeben durch $||a||_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$.
Zeigen Sie, dass K abgeschlossen und beschränkt ist bezüglich $|| \cdot ||_\infty$. Zeigen Sie weiter, dass die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge in K hat.