ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Dietmar Kröner
Dr. Mario Ohlberger

Freiburg, 19.4.2004

Übung zur Vorlesung Analysis II

SS 2004 – Blatt 0

Anwesenheitsübung: **Besprechung der Klausur vom 14.2.2004**

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}.$$

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^n$

Aufgabe 3: (1+1 Punkte)

Sei $f_n(x) := x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}, x \in [0, 1]$.

a) Untersuchen Sie die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in [0, 1]$ auf Konvergenz.

b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig? Geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\tan(x)^{\tan(x)} :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$, für $a > 0$.

Aufgabe 5: (1+1 Punkte)

Sei $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.

a) Gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so dass $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}$ nicht konvergiert (mit Begründung)?

b) Was bedeutet dies für die Differenzierbarkeit von f in x_0?

Aufgabe 6: (1 Punkte)

Geben Sie den Satz von Bolzano Weierstraß an.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert/divergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} x^k$?
Geben Sie den Konvergenzradius an.

Aufgabe 8: (2 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig ist.

Aufgabe 9: (1+1+1 Punkte)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex. Beweisen oder widerlegen Sie:
a) $\max\{f, g\}$ ist konvex.
b) $\alpha f + \beta g$ ist konvex für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
c) $f \cdot g$ ist konvex.

Aufgabe 10: (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{falls } x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = f(x, mx)$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g stetig in 0 ist, aber f nicht stetig in 0 ist.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass dann f strikt monoton ist.

Aufgabe 12: (2+1 Punkte)

Sei $h := \frac{1}{N}$ und $x_i := ih$ für $i = 0, ..., N$. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x$.
a) Berechnen Sie die Riemannsche Summe zu den Stützstellen $\xi_i = x_i - \frac{1}{2N}, i = 1, ..., N$.
b) Konvergieren die Riemannschen Summen für $N \to \infty$? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.