

Grundzüge der Splinetheorie

Ulrich Reif

Universität Freiburg

13. - 15. Januar 2004

Übersicht

1. Splines und B-Splines

- 1.1 Grundlagen
- 1.2 Algorithmen
- 1.3 Subdivision

2. Univariate Approximation

- 2.1 Interpolation und Approximation
- 2.2 Quasiinterpolation
- 2.3 Approximationsordnung
- 2.4 Stabilität

3. Multivariate Approximation

- 3.1 Tensorprodukt-Splines
- 3.2 Scattered Data Probleme
- 3.3 Stabilisierung der Basis
- 3.4 Homogene Randbedingungen
- 3.5 Finite Elemente

Alle Figuren finden sich am Ende des Ausdrucks.

1. Splines und B-Splines

1.1 Grundlagen

Definition: Spline (vorläufig)

Sei $T = \{\tau_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen ohne Häufungspunkte. Eine Funktion $f \in C^{n-2}(\mathbb{R})$ mit

$$D^n f(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus T$$

heißt *Spline der Ordnung n zur Knotenfolge T* . Der Raum aller dieser Splines wird mit $\mathcal{S}_{n,T}$ bezeichnet.

Für $\tau_j \in T$ definiert man die *abgebrochene Potenz*

$$a_j^n(t) := (t - \tau_j)_+^{n-1}, \quad z_+ := \max\{0, z\}.$$

Die a_j^n spannen den linearen Raum aller $f \in \mathcal{S}_{n,T}$ mit kompaktem Träger auf.

Problem: Die Basis der abgebrochenen Potenzen ist weder lokal noch stabil.

Idee: Konstruiere Splines mit minimalem Träger!

Der Ansatz

$$b_j^n = \sum_{k=j}^{j+n} c_{j,k} a_k^n, \quad \text{supp } b_j^n = [\tau_j, \tau_{j+n}]$$

liefert bis auf Skalierung eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{j,k}$. Insbesondere gibt es keine nichttrivialen Splines mit kleinerem Träger.

Lokale Unabhängigkeit: Die Splines $b_{k-n+1}^n, \dots, b_k^n$ spannen auf dem Segment $[\tau_k, \tau_{k+1})$ den Polynomraum \mathbb{P}_n auf,

$$\sum_{j=k-n+1}^k b_j^n(t) p_j = 0, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad p_j = 0 \quad \forall j.$$

Globale Unabhängigkeit: Die Splines $b_j^n, j \in \mathbb{Z}$, sind linear unabhängig auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition: B-Spline (vorläufig)

Die durch

$$\text{supp } b_j^n = s_j^n := [\tau_j, \tau_{j+n}], \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j^n \equiv 1$$

eindeutig charakterisierten Splines nennt man *B-Splines*.

Es gibt Polynome ψ_j^n der Ordnung n mit

$$(t - \tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t) \psi_j^n(\tau).$$

Ist speziell $\tau = \tau_k$, dann gibt es eine Konstante p_k mit

$$(t - \tau_k)^{n-1} = b_k^n(t) p_k, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}).$$

Also ist

$$\sum_j b_j^n(t) \psi_j^n(\tau_k) - b_k^n(t) p_k = 0, \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$

und wegen der lokalen Unabhängigkeit gilt $\psi_j^n(\tau_k) = 0$ für $k - n < j < k$, bzw.

$$\psi_j^n(\tau_k) = 0 \quad \text{für} \quad j < k < j + n.$$

Theorem: Marsden-Identität

Sei T eine einfache Knotenfolge, dann ist

$$(t - \tau)^{n-1} = \sum_j b_j^n(t) \psi_j^n(\tau)$$
$$\psi_j^n(\tau) = (\tau_{j+1} - \tau) \cdots (\tau_{j+n-1} - \tau).$$

Definition: B-Spline

Sei T eine beliebige Knotenfolge mit höchstens n -fachen Knoten. Dann sind die zugehörigen *B-Splines* b_j^n der Ordnung n definiert als Lösungen der Marsden-Identität mit $\text{supp } b_j^n = s_j^n$.

Definition: Spline

Ein *Spline* ist eine Linearkombination von B-Splines,

$$f(t) = \sum_j b_j^n(t) p_j.$$

Fasst man die B-Splines zu einem Zeilenvektor B^n und die Kontrollpunkte zu einem Spaltenvektor P zusammen, dann schreibt man auch

$$f(t) = B^n(t)P.$$

Die stückweise lineare Verbindung der Kontrollpunkte P heißt *Kontrollpolygon*.

Zu endlich vielen B-Splines b_1^n, \dots, b_m^n gehören die Knoten $T = \tau_1, \dots, \tau_{m+n}$. Das Definitionsgebiet wird dann eingeschränkt auf das Intervall

$$D_{n,T} := [\tau_n, \tau_{m+1}].$$

Spezialfälle:

$n = 1$: charakteristische Funktionen der Intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1})$.

$n = 2$: Hutfunktionen

$T = 0 \dots n, 1 \dots n$: Bernsteinpolynome der Ordnung n ,

$$b_j^n = \binom{n-1}{j-1} (1-t)^{n-j} t^{j-1}.$$

$T = \mathbb{Z}$: Die *uniformen B-Splines* sind Translate eines einzigen Prototyps,

$$b_j^n(t) = b_0^n(t - j).$$

Sie haben die Faltungseigenschaft

$$b_0^{n+m} = b_0^n * b_0^m$$

und die Fourier-Transformierte

$$\hat{b}_0^n(2s) = \exp(-ins) \left(\frac{\sin s}{s} \right)^n.$$

Eigenschaften:

Glattheit: Ein Spline der Ordnung n zur Knotenfolge T besteht aus polynomialen Segmenten der Ordnung n , die in einem k -fachen Knoten $(n - k - 1)$ -mal stetig differenzierbar verbunden sind.

Basis:

$$\text{span}\{b_1^n, \dots, b_m^n\} = \mathcal{S}_{n,T}, \quad \dim \mathcal{S}_{n,T} = m.$$

Partition der Eins:

$$\sum_j b_j^n(t) = 1, \quad t \in D_{n,T}.$$

Positivität:

$$b_j^n(t) \geq 0, \quad \text{supp } b_j^n = s_j^n.$$

Unimodalität: Für $n \geq 2$ besitzen die B-Splines ein einziges lokales und globales Maximum.

Greville-Abszissen:

$$\sum_j b_j^n(t) \mu_j = t, \quad t \in D_{n,T}$$
$$\mu_j := \frac{\tau_{j+1} + \dots + \tau_{j+n-1}}{n-1}$$

1.2 Algorithmen

Aus $f \in \mathcal{S}_{n+1,T}$ folgt $\partial f \in \mathcal{S}_{n,T}$. Für die Ableitung eines B-Splines mit einfachen Knoten gilt

$$\text{supp } \partial b_j^{n+1} \subset [\tau_j, \tau_{j+n+1}] \quad \Rightarrow \quad \partial b_j^{n+1} = \alpha_j b_j^n + \beta_{j+1} b_{j+1}^n.$$

Zunächst folgt aus der Partition der Eins

$$0 = \partial \sum_j b_j^{n+1}(t) = \sum_j \partial b_j^{n+1}(t) = \sum_j (\alpha_j + \beta_j) b_j^n(t)$$

und damit $\alpha_j = -\beta_j$. Die Marsden-Identität liefert nun

$$\begin{aligned} nt^{n-1} &= \sum_j \psi_j^{n+1}(0) \partial b_j^{n+1}(t) \\ &= \sum_j \alpha_j (\psi_j^{n+1}(0) - \psi_{j-1}^{n+1}(0)) b_j^n(t). \end{aligned}$$

Vergleich mit

$$nt^{n-1} = n \sum_j \psi_j^n(0) b_j^n(t)$$

ergibt

$$\alpha_j = \frac{n \psi_j^n(0)}{\psi_j^{n+1}(0) - \psi_{j-1}^{n+1}(0)} = \frac{n}{\tau_{j+n} - \tau_j}$$

und schließlich

$$\partial b_j^{n+1} = n \left(\frac{b_j^n}{|s_j^n|} - \frac{b_{j+1}^n}{|s_{j+1}^n|} \right).$$

Theorem: Differentiation

Es gilt

$$f(t) = B^{n+1}(t)P \quad \Rightarrow \quad Df(t) = B^n(t)\tilde{P},$$

wobei

$$\tilde{p}_j := \frac{n}{|s_j^n|} (p_j - p_{j-1}).$$

Für das Integral eines B-Splines gilt

$$D^{-1}b_j^n(t) := \int_{-\infty}^t b_j^n(\tau) d\tau = \frac{|s_j^n|}{n} \sum_{k \geq j} b_k^{n+1}(t)$$

und insbesondere

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_j^n(\tau) d\tau = \frac{|s_j^n|}{n}.$$

Theorem: Integration

Es gilt

$$f(t) = B^n(t)P \quad \Rightarrow \quad Df(t) = B^{n+1}(t)\tilde{P},$$

wobei

$$\tilde{p}_j := \sum_{k \leq j} \frac{|s_k^n|}{n} p_k.$$

Es gilt

$$(t - \tau)^n = \sum_j b_j^{n+1}(t) \psi_j^{n+1}(\tau) = (t - \tau) \sum_j b_j^n(t) \psi_j^n(\tau) .$$

Substitution der Bézierdarstellung

$$(t - \tau) = \frac{(\tau_{j+n} - \tau)(t - \tau_j) + (\tau_j - \tau)(\tau_{j+n} - t)}{|s_j^n|}$$

ergibt

$$\begin{aligned} (t - \tau)^n &= \sum_j \left(\psi_j^{n+1}(\tau)(t - \tau_j) + \psi_{j-1}^{n+1}(\tau)(\tau_{j+n} - t) \right) \frac{b_j^n(t)}{|s_j^n|} \\ &= \sum_j \psi_j^{n+1}(\tau) \left(\frac{t - \tau_j}{|s_j^n|} b_j^n(t) + \frac{\tau_{j+n+1} - t}{|s_{j+1}^n|} b_{j+1}^n(t) \right) . \end{aligned}$$

Theorem: Rekursion

Mit

$$w_j^n(t) := \frac{t - \tau_j}{|s_j^n|}$$

gilt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} b_j^1 &= \chi([\tau_j, \tau_{j+1}]) \\ b_j^{n+1} &= w_j^n b_j^n + (1 - w_{j+1}^n) b_{j+1}^n . \end{aligned}$$

Summanden mit leerem Träger werden weggelassen.

de Boor-Algorithmus:

Zur Auswertung eines Splines $f = B^n P^n$ an der Stelle t geht man wie folgt vor:

- Bestimme den Index k so, dass $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.
- Initialisiere ein Dreiecksschema mit den n relevanten Kontrollpunkten $p_{k-n+1}^n, \dots, p_k^n$.
- Berechne rekursiv das Dreiecksschema

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_{k-n+1}^n & & \searrow & & & & \\
 p_{k-n+2}^n & & \searrow & \rightarrow & p_{k-n+2}^{n-1} & & \searrow \\
 p_{k-n+3}^n & & \searrow & \rightarrow & p_{k-n+3}^{n-1} & \rightarrow & p_{k-n+3}^{n-2} & \searrow \\
 \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \dots \\
 p_k^n & \rightarrow & p_k^{n-1} & \rightarrow & p_k^{n-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow p_k^1
 \end{array}$$

Zur Berechnung von p_j^ν verwendet man das Gewicht

$$w_j^\nu(t) = \frac{t - \tau_j}{|s_j^\nu|}.$$

Der Pfeil \rightarrow steht für Multiplikation mit $w_j^\nu(t)$.

Der Pfeil \searrow steht für Multiplikation mit $(1 - w_j^\nu(t))$.

- Der gesuchte Wert ist $f(t) = p_k^1$.

1.3 Subdivision

Sei

$$\tilde{T} := T \cup \tau$$

eine erweiterte Knotenfolge, dann ist

$$\mathcal{S}_{n,T} \subset \mathcal{S}_{n,\tilde{T}}, \quad B^n P = \tilde{B}^n \tilde{P}.$$

Die veränderten neuen Kontrollpunkte \tilde{P} finden sich in der zweiten Spalte des de Boor-Schemas.

Den Übergang $P \mapsto \tilde{P}$ nennt man *Subdivision*.

Theorem: Konvergenz der Subdivision

Sei $f := B^n P = \tilde{B}^n \tilde{P}$, $T \subset \tilde{T}$ und $D^2 f = B^{n-2} \Delta^2 P$.
Dann ist der L^∞ -Abstand zwischen dem Spline f und dem Kontrollpolygon zu \tilde{P} beschränkt durch

$$\frac{\max_j |\tilde{s}_j^n|^2}{8(n-2)} \|\Delta^2 P\|_\infty.$$

Ist speziell $T = 2h\mathbb{Z}$ und $\tilde{T} = h\mathbb{Z}$, dann berechnet sich \tilde{P} nach dem *Lane-Riesenfeld-Algorithmus*:

$$P \leftarrow \dots, p_{-1}, p_{-1}, p_0, p_0, p_1, p_1, \dots$$

for $k = 1$ **to** $n - 1$ **do**

$$p_j \leftarrow (p_j + p_{j+1})/2 \text{ for all } j$$

end

$$\tilde{P} = P$$

2. Univariate Approximation

2.1 Interpolation und Approximation

Theorem: Nullstellen

Wenn die Anzahl der Nullstellen eines Splines auf dem Intervall (τ_1, τ_{n+m}) größer oder gleich $\dim \mathcal{S}_{n,T} = m$ ist, dann verschwindet er auf einem Segment $[\tau_k, \tau_{k+1})$.

Theorem: Interpolation (Schoenberg-Whittney)

Das Interpolationsproblem

$$B^n(u_j)P = g_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$b_j^n(u_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Theorem: Least Squares Approximation

Das Approximationsproblem

$$\sum_{j=1}^M (B^n(u_j)P - g_j)^2 \rightarrow \min, \quad M \geq m,$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine Teilfolge von u_1, \dots, u_M gibt, die die Schoenberg-Whittney-Bedingung erfüllt.

Wenn die Daten U, G verrauscht sind oder große Lücken aufweisen, empfiehlt sich die Verwendung eines *Smoothing Splines*,

$$\|B^n(U)P - G\|_2^2 + w \int_{D_{n,T}} (D^2 B^n(t)P)^2 dt \rightarrow \min .$$

- Die Kontrollpunkte P ergeben sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems $AP = G$. Die Matrix A ist symmetrisch, hat Band-Struktur und ist positiv definit, falls $w > 0$.
- Erfüllt eine Teilfolge von U die Schoenberg-Whittney-Bedingung, so konvergiert der Smoothing Spline für $w \rightarrow 0$ gegen die Lösung des Least-Squares-Problems.
- Ist $U = T$ und $n = 4$, so konvergiert der Smoothing Spline für $w \rightarrow 0$ gegen den natürlichen kubischen Spline-Interpolanten.
- Für $w \rightarrow \infty$ konvergiert der Smoothing Spline gegen die Ausgleichsgerade zu den Daten (U, G) .
- Die Justierung von w ist häufig problematisch.

Idee: Bestimme den maximalen Wert von w , für den der Fehler $E := \|B^n(U)P - G\|_2^2$ eine Schranke E_{\max} nicht übersteigt.

Dieses Problem ist numerisch effizient lösbar, da E monoton und konvex in w^{-1} ist (Padé-Approximation).

2.2 Quasiinterpolation

Um das Lösen u.U. sehr großer Gleichungssysteme zu vermeiden, kann man versuchen, geeignete Kontrollpunkte allein aus lokalen Informationen zu schätzen.

Seien μ_1, \dots, μ_m die Greville-Abszissen zu den Knoten T . Der *Schoenberg-Quasiinterpolant* Q ist definiert durch

$$Qg = f := \sum_j b_j^n g(\mu_j).$$

Eigenschaften:

- Formerhaltung (Vorzeichen, Monotonie und Konvexität)
- $Qg = g$ für $g \in \mathbb{P}_2$
- quadratische Konvergenz

$$\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|D^2 g\|_\infty \max_j |s_j^n|^2.$$

Definition: Quasiinterpolant

Ein *Quasiinterpolant* Q der Ordnung ν ist eine lineare Abbildung

$$C^0 \ni g \mapsto Qg = \sum_j b_j^n (Q_j g) \in \mathcal{S}_{n,T}$$

mit den Eigenschaften

- Beschränktheit: $\|Q_j\|_\infty \leq C_Q$.
- Polynomiale Präzision: $Qg = g$ für alle $g \in \mathbb{P}_\nu$.
- Lokalität: $Q_j g$ hängt nur von $g|_{s_j^n}$ ab.

Theorem: Approximationsfehler

Für $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ sei

$$h(t) := [\tau_{k-n+1}, \tau_{k+n}], \quad h := \sup_t |h(t)|.$$

Für den Approximationsfehler eines Quasiinterpolanten Q der Ordnung ν gilt

$$\|g - Qg\|_\infty \leq \frac{1}{\nu!} C_Q \|D^\nu g\|_\infty h^\nu.$$

Beweis: Sei $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ fest und

$$p(s) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{\partial^\mu g(t)}{\mu!} (s - t)^\mu$$

das Taylorpolynom ν -ter Ordnung in t . Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(t) - (Qg)(t)| &= |g(t) - p(t) + (Q(p - g))(t)| \\ &= |(Q(p - g))(t)| \leq \max_{k-n < j \leq k} |Q_j(p - g)| \\ &\leq C_Q \|p - g\|_{\infty, h(t)}. \end{aligned}$$

Für den Fehler der Taylorapproximation gilt

$$\|p - g\|_{\infty, h(t)} \leq \frac{\|D^\nu g\|_{\infty, h(t)}}{\nu!} h^\nu,$$

woraus die Behauptung folgt.

Betrachte die Marsden-Identität

$$(t - \tau)^{\nu-1} = \sum_j b_j^n(t) \psi_j^{n,\nu}(\tau)$$

$$\psi_j^{n,\nu}(\tau) := (-1)^{(n-\nu)} \frac{(\nu-1)!}{(n-1)!} \partial^{(n-\nu)} \psi_j^n(\tau).$$

Daraus folgt: Wenn für den Quasiinterpolanten Q gilt

$$Q_j(\cdot - \tau)^{\nu-1} = \psi_j^{n,\nu}(\tau), \quad j = 1, \dots, m,$$

dann hat Q die Ordnung ν .

Ein einfaches allgemeines Konstruktionsprinzip ist die Linearkombination von Funktionswerten,

$$Q_j g := \sum_k Q_{j,k} g(t_{j,k}), \quad t_{j,k} \in s_j^n.$$

In diesem Fall ist

$$\|Q_j\|_\infty = \sum_k |Q_{j,k}|.$$

Für paarweise verschiedene Abszissen $t_{j,k}$ kann man die Koeffizienten $Q_{j,k}$ als Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Die Koeffizienten eines Quasiinterpolanten der maximalen Ordnung n ergeben sich insbesondere aus

$$\sum_{k=1}^n Q_{j,k} (t_{j,k} - t_{j,\ell})^{n-1} = \psi_j^n(t_{j,\ell}), \quad \ell = 1, \dots, n.$$

2.3 Approximationsordnung

Es wird ein spezieller Quasiinterpolant Q^* maximaler Ordnung konstruiert. Sei $[\tau_J, \tau_{J+1})$ das längste Teilintervall des Trägers s_j^n von b_j^n . Dann wählt man die Abszissen $t_{j,k}$ als äquidistante Unterteilung dieses Intervalls,

$$t_{j,k} := \tau_J + \frac{k-1}{n-1} (\tau_{J+1} - \tau_J), \quad k = 1, \dots, n.$$

Damit erhält man nach Skalierung das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n Q_{j,k}^* (k-\ell)^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{(\tau_{J+1} - \tau_J)^{n-1}} \psi_j^n(t_{j,\ell}), \quad \ell = 1, \dots, n$$

für einen Quasiinterpolanten maximaler Ordnung. Die Matrix des Systems ist unabhängig von T und die Elemente der rechten Seite sind betragsmäßig kleiner als n^{2n} . Damit hängt die Konstante $C_Q = C_Q^*(n)$ nur von n und *nicht* von der speziellen Wahl der Knotenfolge ab.

Die Q_j^* sind *duale Funktionale* zur B-Splinebasis,

$$Q_j^* b_\ell^n = \delta_{j,\ell}$$

und folglich ist Q^* eine *Projektion* in den Splineraum $\mathcal{S}_{n,T}$,

$$Q^* b_\ell^n = b_\ell^n, \quad Q^* \circ Q^* = Q^*.$$

Theorem: Approximationsordnung

Sei $g \in C^n(\mathbb{R})$, dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$

$$\|g - Q^* g\|_p \leq \frac{1}{n!} C_Q^*(n) |D_{n,T}|^{1/p} \|D^n g\|_\infty h^n.$$

Weitere Quasiinterpolanten maximaler Ordnung:

de Boor-Fix: Für beliebige $t_j \in s_j^n$ ist der *de Boor – Fix Quasiinterpolant* gegeben durch

$$Q_j g = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{(k-1)} D^{(k-1)} \psi_j^n(t_j)}{(n-1)!} \partial^{n-k} g(t_j).$$

Local Least Squares: Ein Quasiinterpolant, der in den Anwendungen sehr gute numerische Resultate liefert, lässt sich wie folgt konstruieren: Zur Bestimmung des Koeffizienten p_j löst man das lokale L^2 -Problem

$$\left\| g - \sum_{k=j-n+1}^{j+n-1} b_k^n \tilde{p}_k \right\|_{2, s_j^n} \rightarrow \min$$

und setzt $p_j = Q_j g := \tilde{p}_j$.

Orthogonal-Entwicklung: Für $T = h\mathbb{Z}$ sind die B-Splines orthonormiert bezüglich des Sobolev-Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_\Omega := \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu h^{2\mu-1} \langle \partial f^\mu, \partial^\mu g \rangle,$$

wobei die Gewichte ω_μ gegeben sind durch

$$\left(\frac{y/2}{\sin(y/2)} \right)^{2n} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_\mu y^{2\mu} + O(y^{2n}).$$

Der zugehörige Quasiinterpolant ist

$$Q_j g := \langle g, b_j^n \rangle_\Omega.$$

2.4 Stabilität:

Theorem: L^∞ -Stabilität

Für jede Knotenfolge T gilt

$$C_Q^*(n)^{-1} \|P\|_\infty \leq \|B^n P\|_\infty \leq \|P\|_\infty.$$

Beweis: Es gilt

$$|p_j| = |Q_j^*(B^n P)| \leq \|Q_j^*\|_\infty \|B^n P\|_\infty \leq C_Q^*(n) \|B^n P\|_\infty.$$

Die zweite Ungleichung ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Positivität der B-Splines und der Partition der Eins.

Theorem: L^p -Stabilität

Sei $\tilde{b}_j^n := b_j^n / \|b_j^n\|_p$. Es gibt Konstanten $r_p(n)$, $R_p(n)$, sodass

$$r_p(n) \|P\|_p \leq \|\tilde{B}^n P\|_p \leq R_p(n) \|P\|_p$$

Theorem: Stabilität der Gram-Matrix

Sei G die Gram-Matrix des Least Squares Problems

$$\|g - B^n P\|_2 \rightarrow \min$$

und $C = (\text{diag } G)^{-1/2}$. Dann gilt nach Diagonalvorkonditionierung

$$\text{cond}_2 CGC \leq R_2(n)/r_2(n).$$

3. Multivariate Approximation

3.1 Tensorprodukt-Splines

Definition: Tensorprodukt-Spline

Die Tensorprodukt-B-Splines (TPB-Splines) der Ordnung (n, \tilde{n}) zu den Knoten S, T sind definiert durch

$$b_{j,k}^{n,\tilde{n}}(s, t) := b_j^n(s) b_k^{\tilde{n}}(t).$$

Ein Tensorprodukt-Spline ist gegeben durch

$$f(s, t) := \sum_{j,k} b_{j,k}^{n,\tilde{n}}(s, t) p_{j,k}.$$

Fasst man die Kontrollpunkte $p_{j,k}$ in einer $(m \times \tilde{m})$ -Matrix P zusammen, dann ist

$$f(s, t) = B^n(s) P (B^{\tilde{n}}(t))^T.$$

Die TPB-Splines sind lokal und global linear unabhängig und bilden eine positive Partition der Eins. Der Träger ist

$$\text{supp } b_{j,k}^{n,\tilde{n}} = s_j^n \times s_k^{\tilde{n}}.$$

Typischerweise übertragen sich univariate Algorithmen (z.B. Differenziation, Auswertung, Subdivision) unmittelbar auf den Tensorprodukt-Fall. Beispiel Auswertung:

- Berechne den Vektor $Q = B^n(s) P$ durch Auswertung der Splines, die den Spalten von P entsprechen.
- Berechne $f(s, t) = B^{\tilde{n}}(t) Q^T$.

3.2 Scattered Data Probleme

Gegeben seien die Daten

$$(u_j, v_k, g_{j,k}), \quad j = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, \tilde{M}$$

auf dem Gitter $U \times V$. Das Least-Squares-Problem

$$\|B^n(U) P(B^{\tilde{n}}(V))^T - G\|_2 \rightarrow \min$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Schoenberg-Whittney-Bedingung in u - und in v -Richtung erfüllt ist. Die Berechnung der Lösung lässt sich faktorisieren,

$$\begin{aligned} (B^n(U))^T B^n(U) Q &= (B^n(U))^T G &\Rightarrow Q \\ (B^{\tilde{n}}(V))^T B^{\tilde{n}}(V) P^T &= (B^{\tilde{n}}(V))^T Q^T &\Rightarrow P \end{aligned}$$

Bei unstrukturierten Daten (scattered data)

$$(u_\ell, v_\ell, g_\ell), \quad \ell = 1, \dots, L$$

muss ein Gleichungssystem der Dimension $m\tilde{m} \times m\tilde{m}$ gelöst werden.

Probleme:

- Die Gram-Matrix ist schwach besetzt, hat aber große Bandbreite.
- Die Kondition der Gram-Matrix kann sehr groß sein.
- Am Rand des Approximationsbereichs kann es zu Artefakten kommen.
- Die Smoothing Spline-Konstruktion ist nur sehr bedingt hilfreich.

Stabilisierung der Basis:

Die Ursache der genannten Probleme liegt in der mangelnden Stabilität der TPB-Splinebasis auf beschränkten Gebieten.

Sei im Folgenden $S = T = h\mathbb{Z}$, $n = \tilde{n}$ und Ω ein glatt berandetes Gebiet in \mathbb{R}^2 .

Die *relevanten Indizes* sind

$$K := \{\ell \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } b_\ell^n \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

Die *inneren Indizes* sind

$$I := \{\ell \in K : \text{supp } b_\ell^n \cap \Omega \text{ enthält eine Gitterzelle}\}.$$

Die *äußeren Indizes* sind

$$J := K \setminus I.$$

Idee: Kopple die äußeren B-Splines so an die inneren B-Splines, dass die Stabilität und die Approximationsordnung erhalten bleiben,

$$B_i^n := b_i^n + \sum_{j \in J(i)} e_{i,j} b_j^n.$$

Der aufgespannte Raum wird mit $\mathcal{S}_{n,h}^e$ bezeichnet.

Duale Funktionale: Wähle eine Gitterzelle in $\text{supp } b_i^n \cap \Omega$ als Träger des (tensorierten) Funktionals Q_i^* und definiere

$$Q^* g := \sum_{i \in I} B_i^n(Q_i^* g),$$

dann ist Q^* beschränkt und lokal. Außerdem ist Q^* ein Projektor auf $\mathcal{S}_{n,h}^e$ wegen

$$Q_i^* B_{i'}^n = \delta_{i,i'}, \quad i, i' \in I.$$

Damit ist für die Approximationsordnung entscheidend, dass alle Polynome der Bi-Ordnung n im Splineraum enthalten sind,

$$\mathbb{P}_n(\Omega) \subset \mathcal{S}_{n,h}^e.$$

Aus der Marsden-Identität folgt für uniforme Knoten

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} b_k^n p_k \in \mathbb{P}_n(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \{p_k\}_{k \in K} \in \mathbb{P}_n(K).$$

Für jedes $p \in \mathbb{P}_n$ muss also gelten

$$\sum_{k \in K} b_k^n p(k) = \sum_{i \in I} B_i^n p(i)$$

und folglich

$$\sum_{i \in I(j)} e_{i,j} p(i) = p(j), \quad j \in J.$$

Sei $I(j)$ das zu $j \in J$ nächstgelegene $(n \times n)$ -Array innerer Indizes, dann genügt es, diese Bedingung für die zugehörigen Lagrange-Polynome $L_{j,i}$, $i \in I(j)$ zu erfüllen, d.h.

$$L_{j,i}(i') = \delta_{i,i'}, \quad e_{i,j} := L_{j,i}(j).$$

Definition: EB-Splines

Die *erweiterten B-Splines (EB-Splines)* sind definiert durch

$$B_i^n := b_i^n + \sum_{j \in J(i)} e_{i,j} b_j^n, \quad e_{i,j} := L_{j,i}(j), \quad i \in I.$$

Theorem: Approximationsordnung in L^p

Sei $g \in C^n(\Omega)$, dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$

$$\|g - Q^*g\|_p \leq c(n) |\Omega|^{1/p} \|D^n g\|_\infty h^n.$$

Theorem: Approximationsordnung in H^m

Sei $g \in H^\nu(\Omega)$, dann gilt für $m < r \leq \min(n, \nu)$

$$\|g - Q^*g\|_{m,2} \leq c(n, \Omega) \|g\|_{r,2} h^{r-m}.$$

Theorem: Stabilität in L^p

Sei $\tilde{B}_i^n := B_i^n / h^{2/p}$. Es gibt Konstanten $r_p(n), R_p(n)$, sodass

$$r_p(n) \|P\|_p \leq \|\tilde{B}^n P\|_p \leq R_p(n) \|P\|_p.$$

Theorem: Stabilität in H^m

Sei $\tilde{B}_i^n := B_i^n / h$. Es gibt Konstanten $r_2^m(n), R_2^m(n)$, sodass

$$r_2^m(n) \|P\|_2 \leq \|\tilde{B}^n P\|_{m,2} \leq R_2^m(n) h^{-m} \|P\|_2.$$

3.4 Homogene Randbedingungen

Im Allgemeinen gilt: Wenn ein TP-Spline auf dem Rand von Ω verschwindet, dann verschwindet er auf allen Gitterzellen, die den Rand von Ω schneiden.

Wie lassen sich homogene Randbedingungen realisieren?

- Penalty-Methode
- Lagrange-Multiplikator-Methode
- Gewichtsfunktion

Definition: WEB-Spline

Sei $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine glatte Funktion, für die

$$\frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{w(x)}$$

nach oben und unten beschränkt ist. Die zugehörigen *gewichteten erweiterten B-Splines (WEB-Splines)* sind definiert durch

$$B_i^n := w \left(b_i^n + \sum_{j \in J(i)} e_{i,j} b_j^n \right), \quad i \in I.$$

Theorem: Approximation und Stabilität

WEB-Splines besitzen dieselben Approximations- und Stabilitätseigenschaften wie EB-Splines.

3.5 Finite Elemente

Modellproblem: Betrachte die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die FE-Näherungslösung

$$u_h = \sum_{i \in I} B_i^n p_i$$

ist charakterisiert durch das lineare Gleichungssystem

$$GP = F,$$

wobei

$$G_{i,k} = \int_{\Omega} \nabla B_i^n \nabla B_k^n, \quad F_i = \int_{\Omega} B_i^n f.$$

Die Randbedingung wird exakt eingehalten.

Theorem: Stabilität der Galerkin-Matrix

Es gibt eine Konstante c , sodass

$$\text{cond}_2 G \leq ch^{-2}.$$

Theorem: Approximationsordnung

Sei $u \in H^\nu(\Omega)$ die Lösung der Poisson-Gleichung, dann gilt für $m < r \leq \min(n, \nu)$

$$\|u - u_h\|_{m,2} \leq c(n, \Omega) \|u\|_{r,2} h^{r-m}.$$

Eigenschaften:

- Optimale Approximationsordnung mit wenigen Koeffizienten
- Stabilität
- keine Vernetzung erforderlich
- einfache Implementierung
- $O(1)$ -Konvergenz mit Multigrid

Probleme:

- Bestimmung einer geeigneten Gewichtsfunktion
- hochgenaue numerische Integration

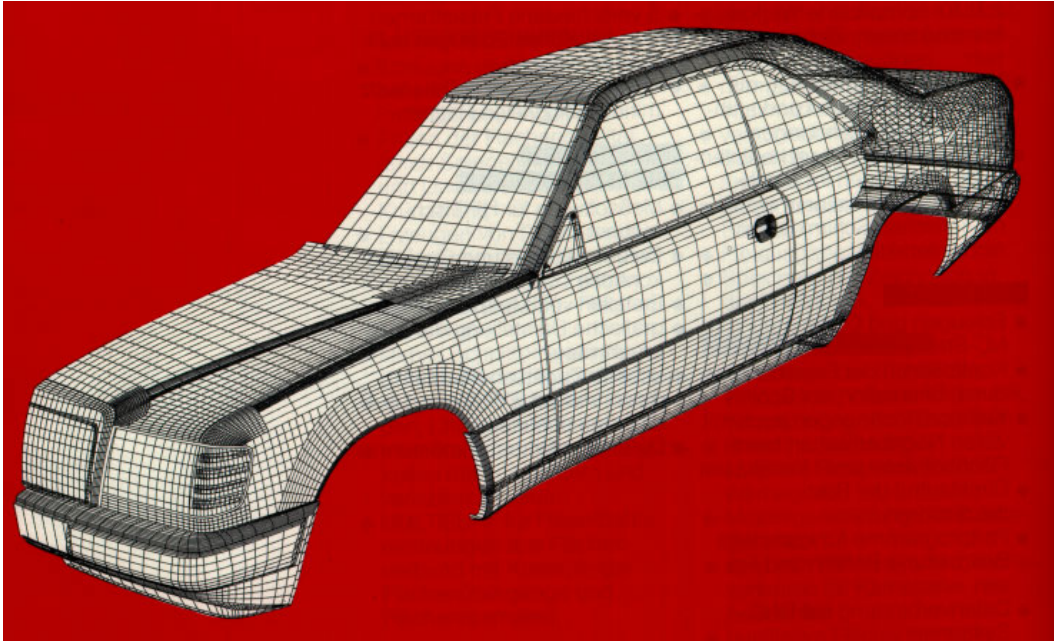
Varianten:

- Probleme höherer Ordnung, $w \rightarrow w^q$
- adaptive lokale Verfeinerung
- Stabilisierung durch Diagonal-Vorkonditionierung

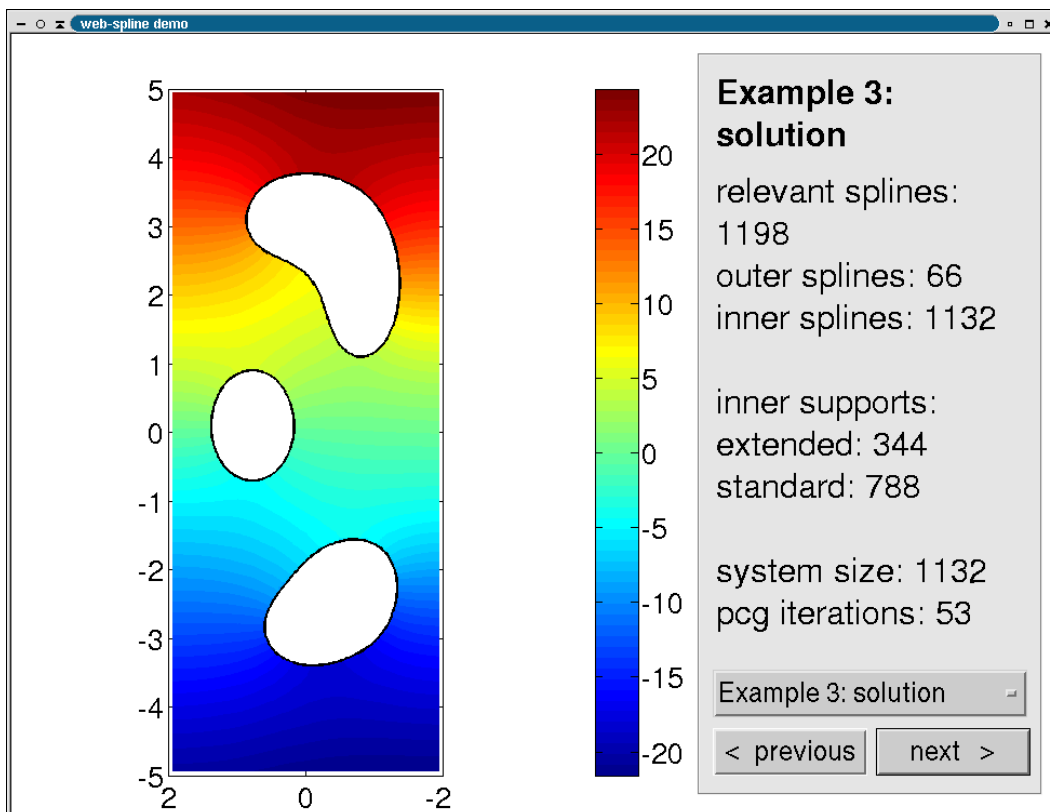
Literatur:

- C. de Boor: A Practical Guide to Splines
- K. Höllig: Finite Element Methods with B-Splines
- J. Hoschek und D. Lasser: Grundlagen der Geometrischen Datenverarbeitung
- L. Schumaker: Spline Functions Basic Theory
- **www.web-spline.de**

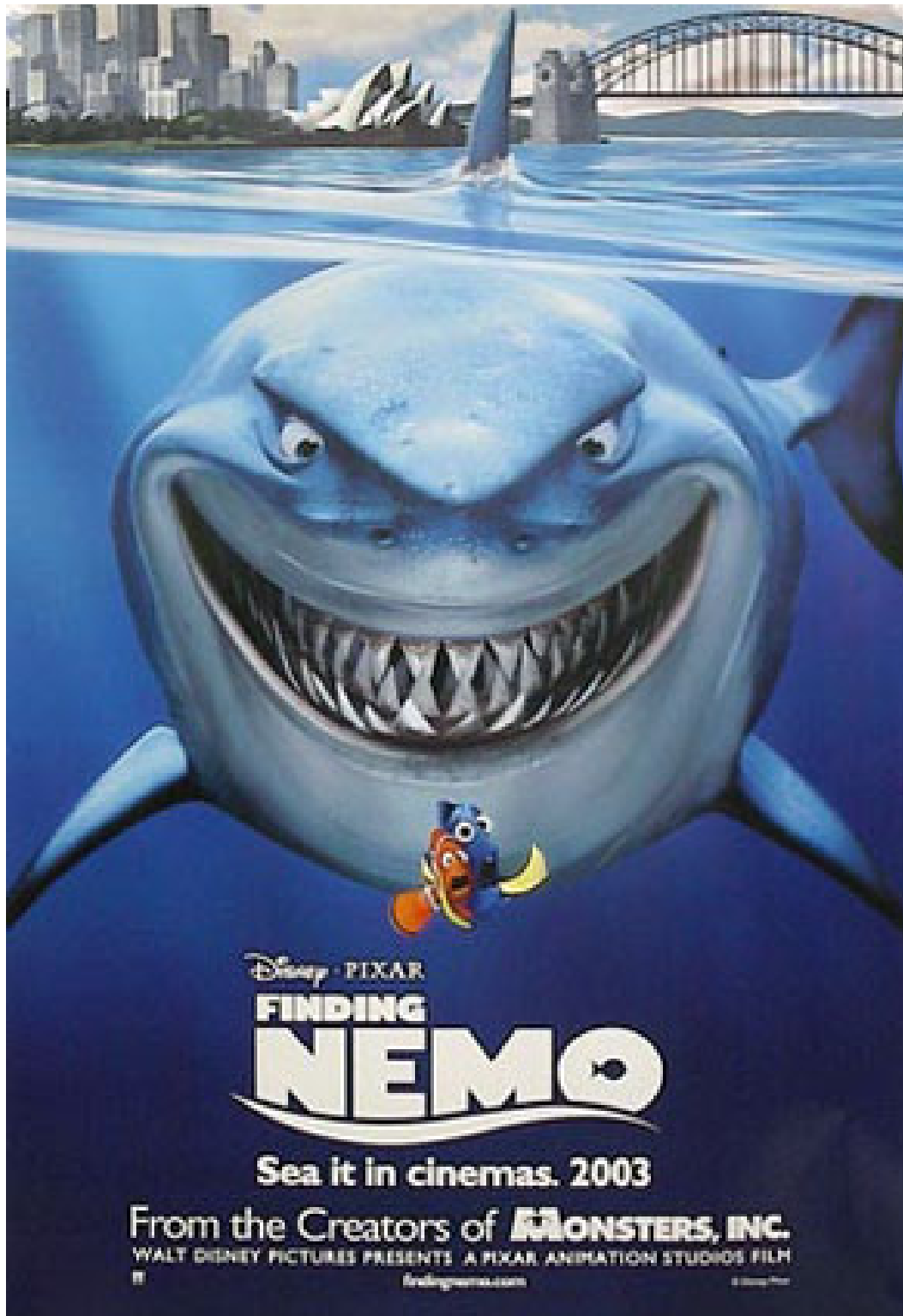
Anwendungen – CAD:



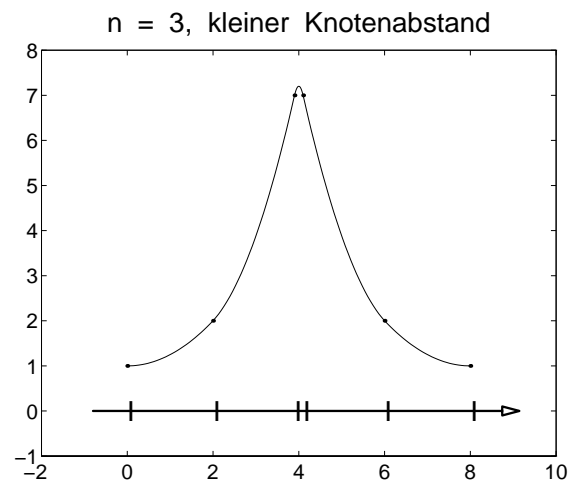
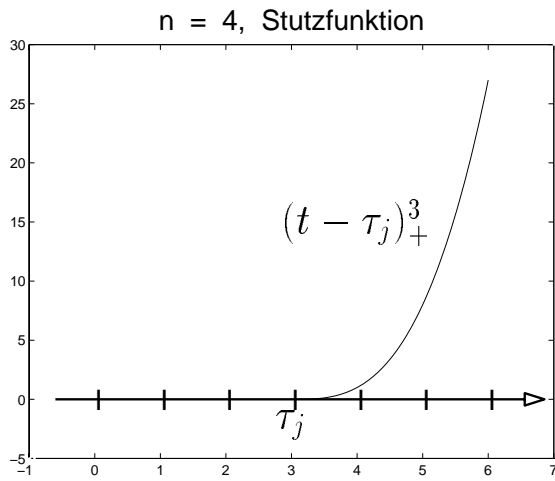
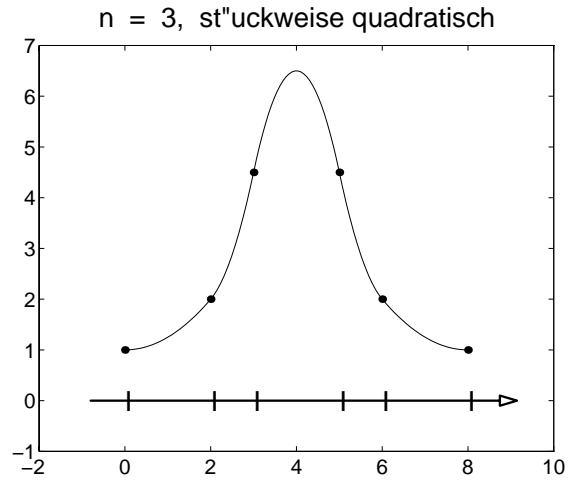
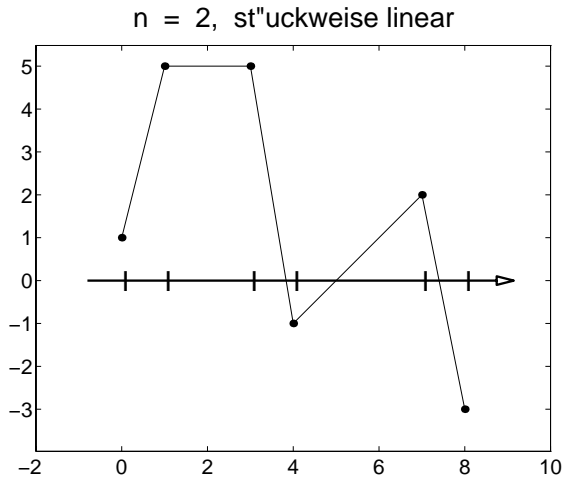
Anwendungen – Approximation:



Anwendungen – Computergrafik:

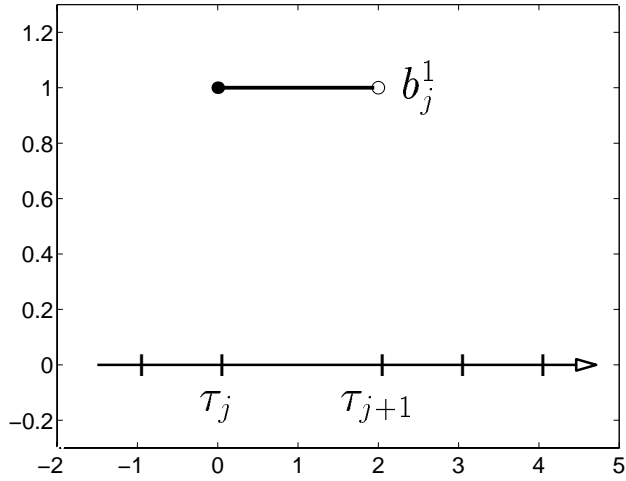


Splines:

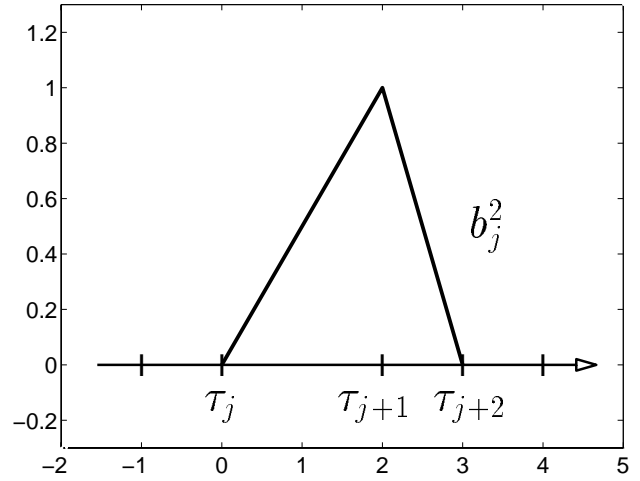


B-Splines:

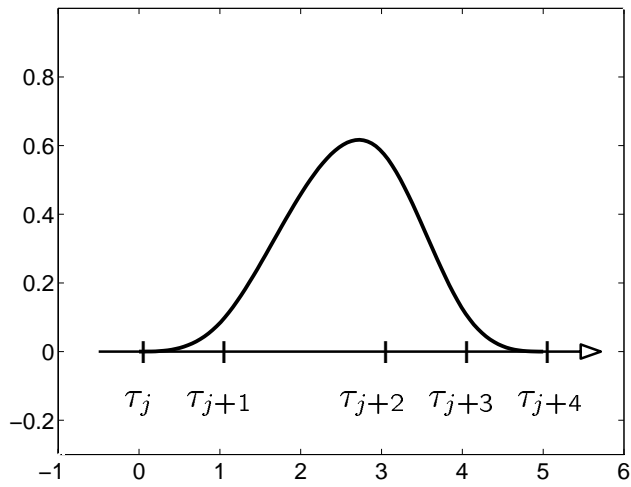
n = 1, charakteristische Funktion



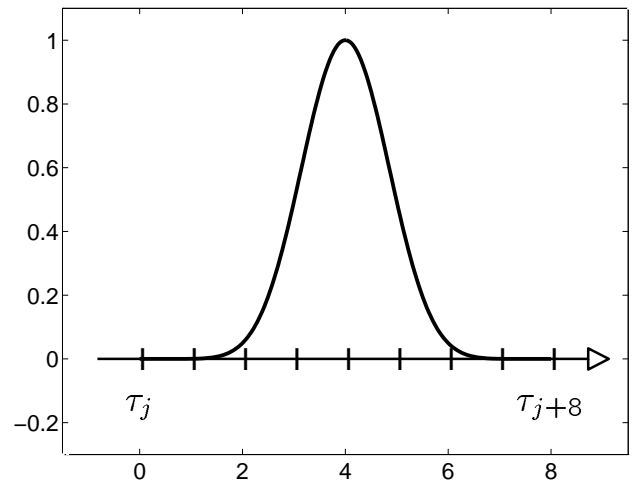
n = 2, Hutfunktion



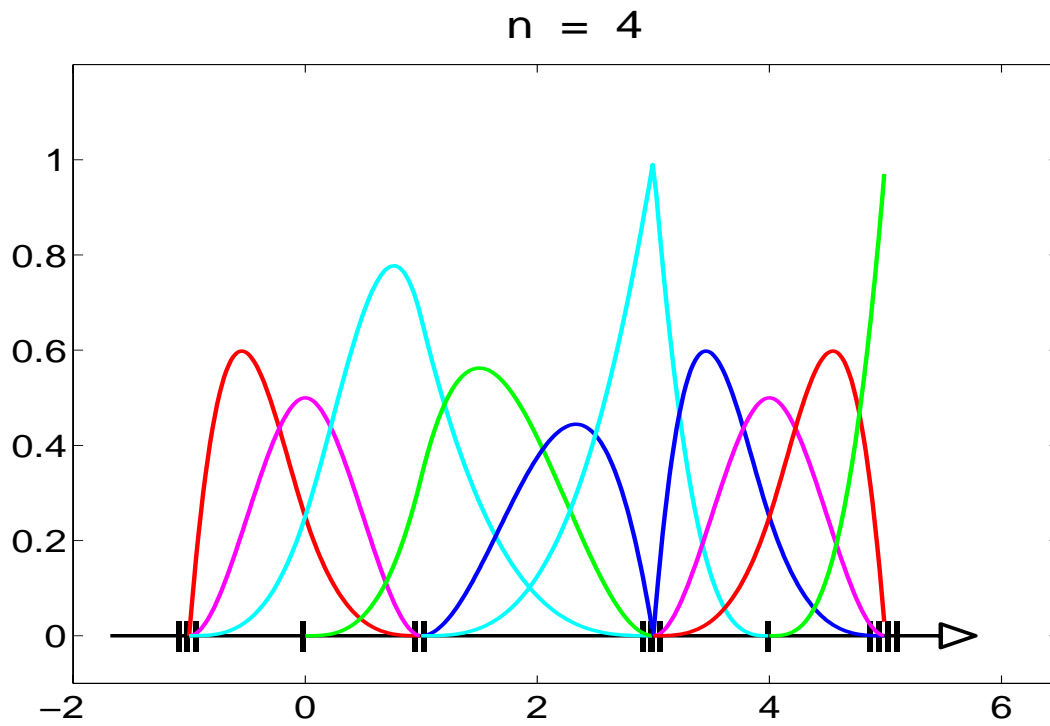
n = 4



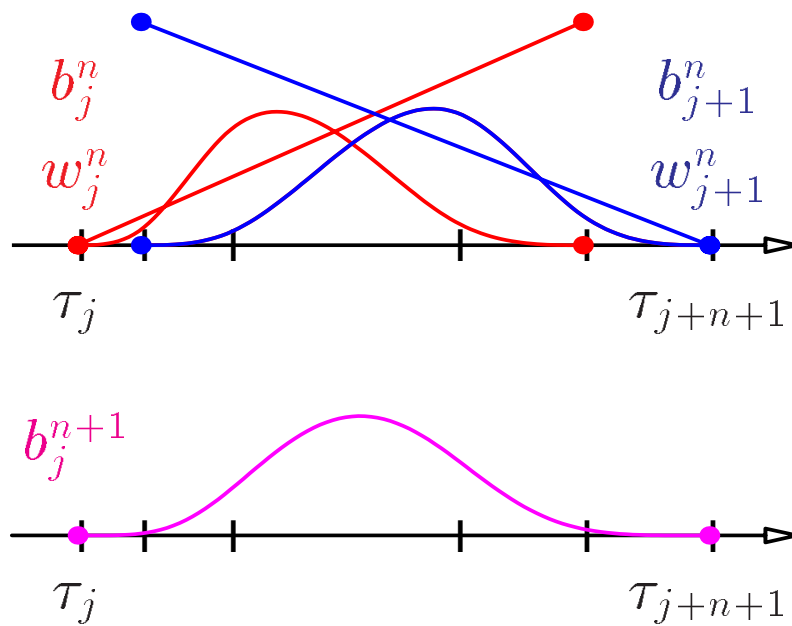
n = 8, "aquidistant"



B-Splines mit mehrfachen Knoten:



Rekursion:



Subdivision:

$$T = 0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 5, 5, 5$$

$$p = -2, 16, 4, 0, 8, -1$$

$$\mapsto T = 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5$$

$$p = -2, 16, 8, 2, 2, 8, -1$$

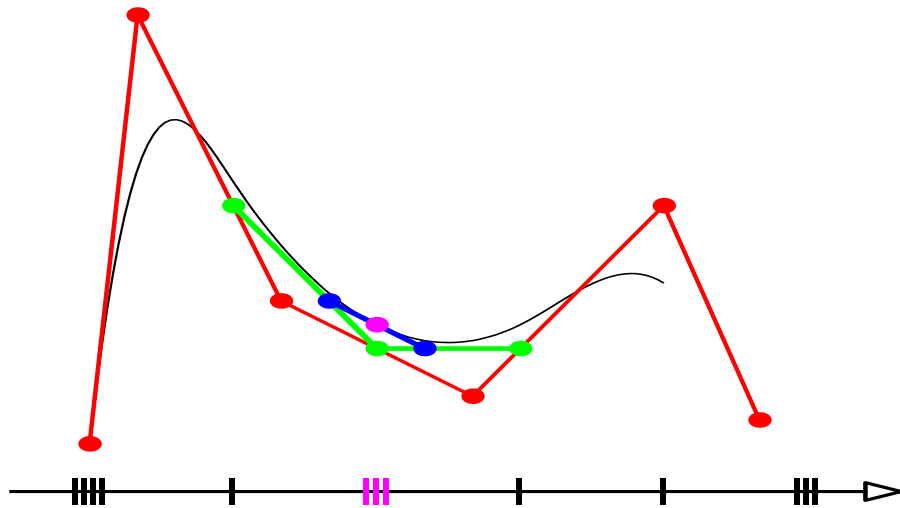
$$\mapsto T = 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5$$

$$p = -2, 16, 8, 4, 2, 2, 8, -1$$

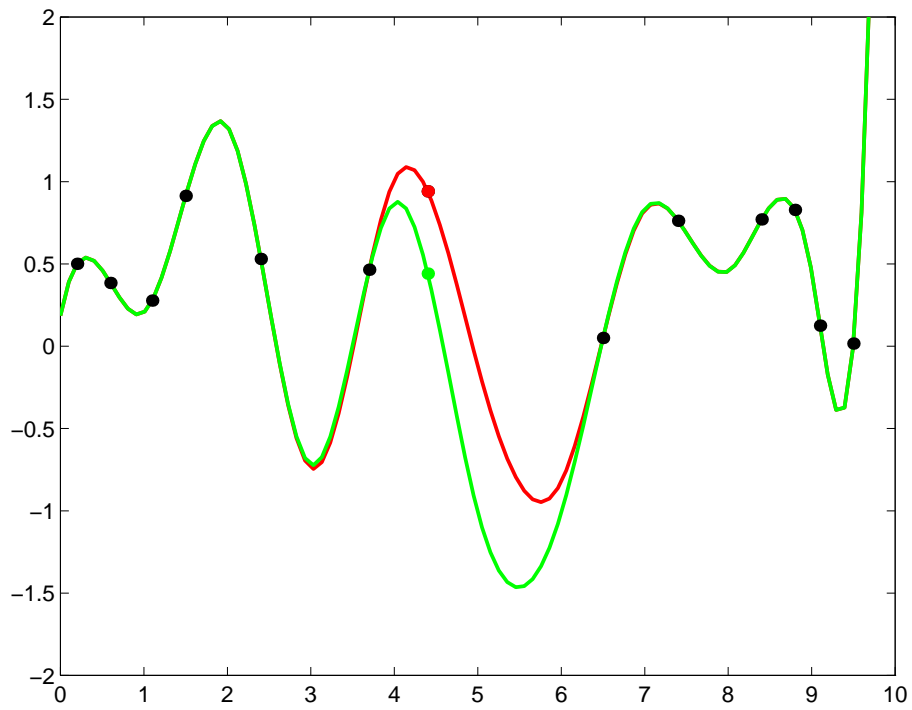
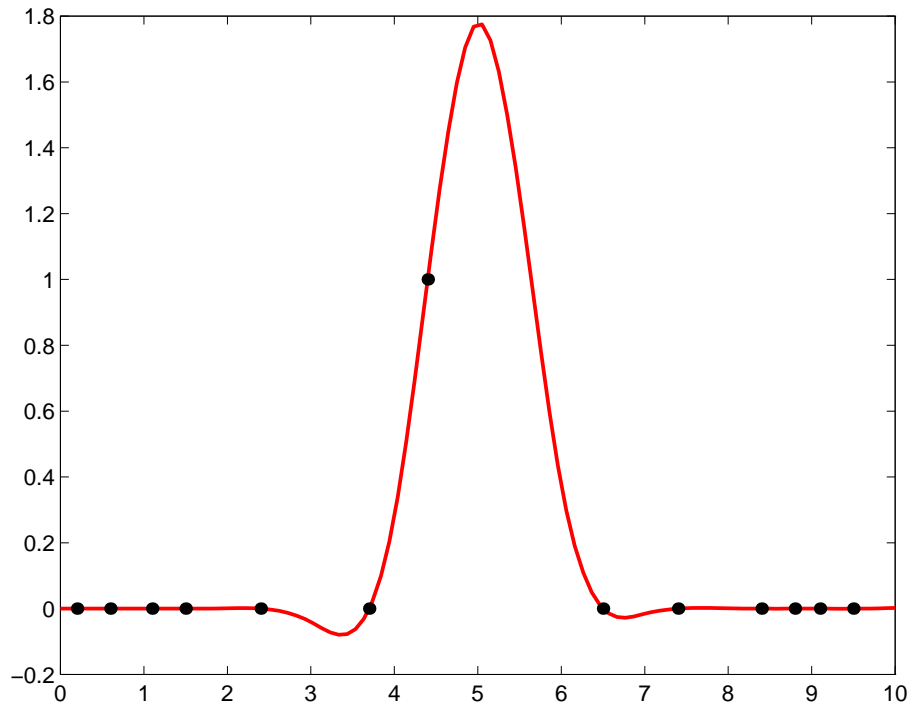
$$\mapsto T = 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5$$

$$p = -2, 16, 8, 4, 3, 2, 2, 8, -1$$

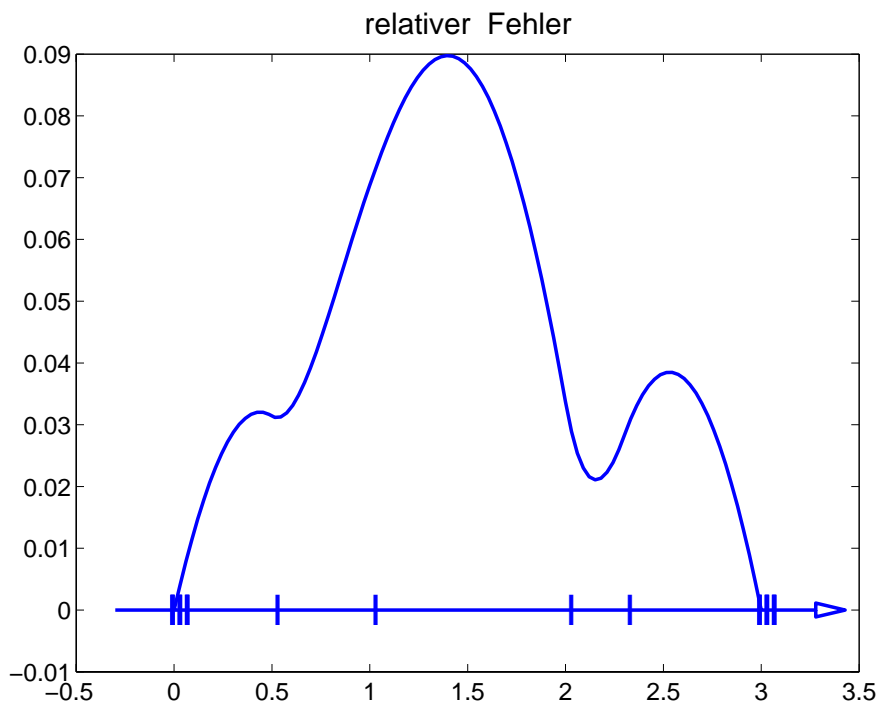
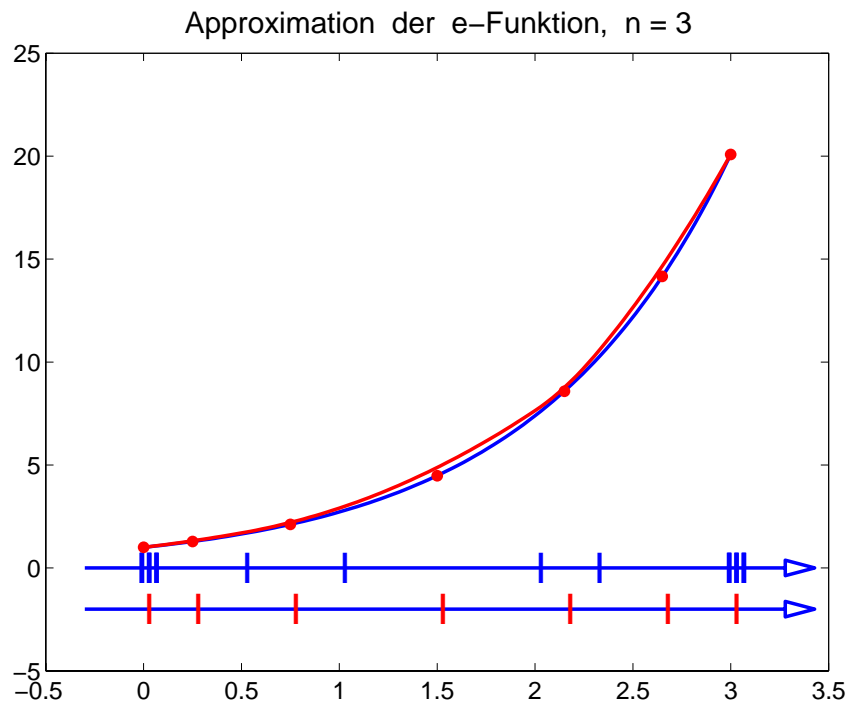
$$\begin{array}{cccc}
 -2 & & -2 & & -2 & & -2 \\
 16 & & 16 & & 16 & & 16 \\
 4 & \mapsto & 4 & 8 & \mapsto & 4 & 8 \\
 0 & \mapsto & 0 & 2 & \mapsto & 0 & 2 & 4 \\
 8 & & 8 & 2 & & 8 & 2 & 2 & 3 \\
 -1 & & -1 & & -1 & & -1 & &
 \end{array}$$



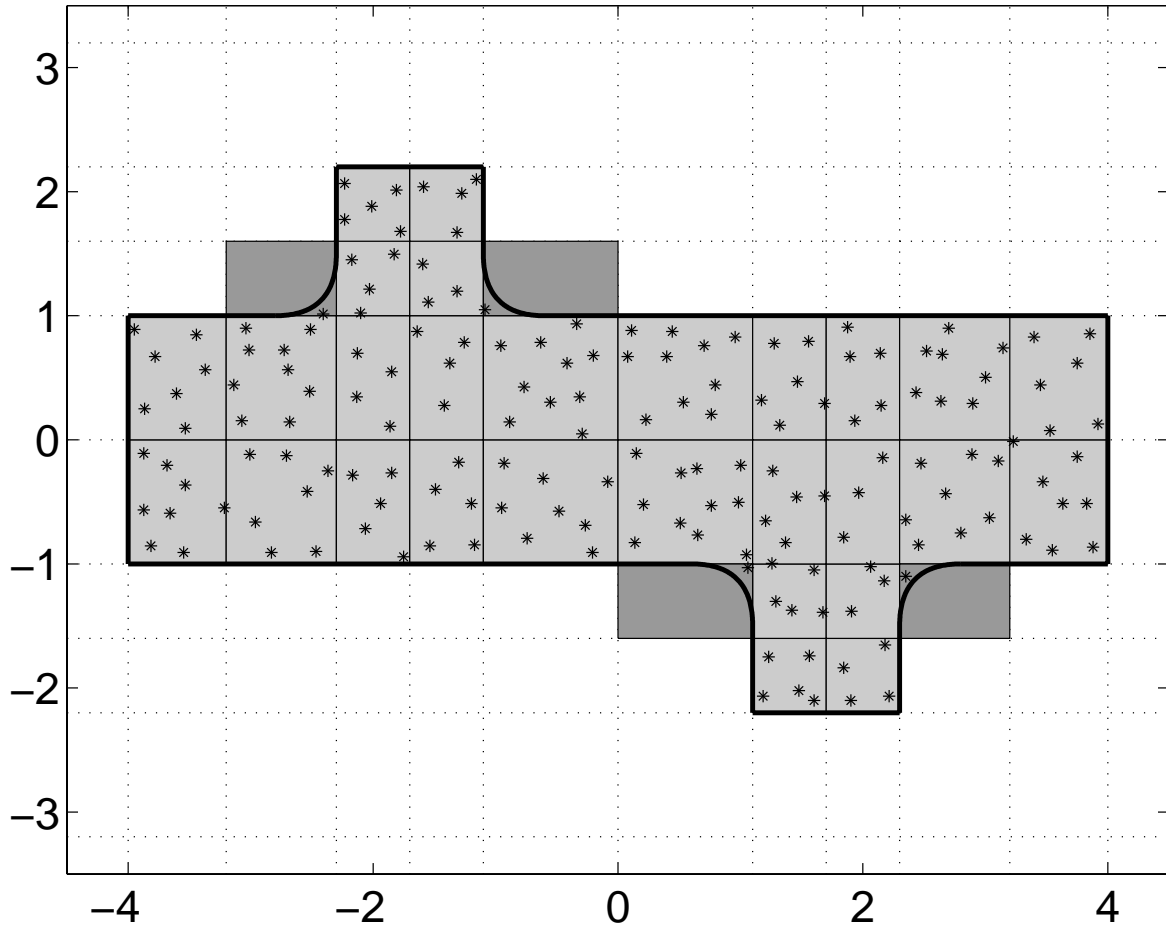
Interpolation:



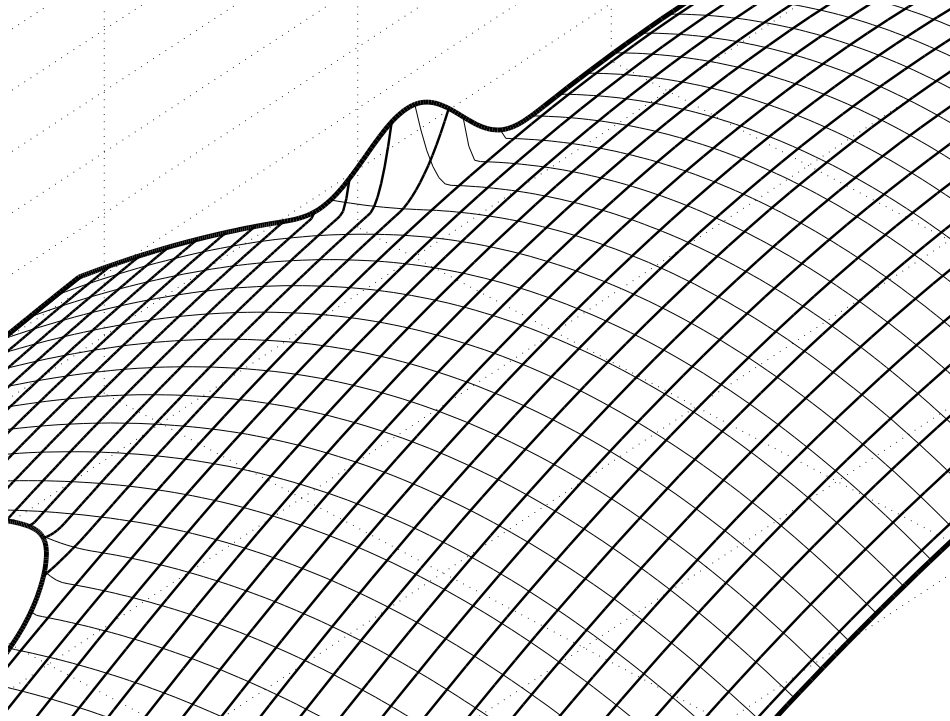
Schoenberg-Quasiinterpolant:



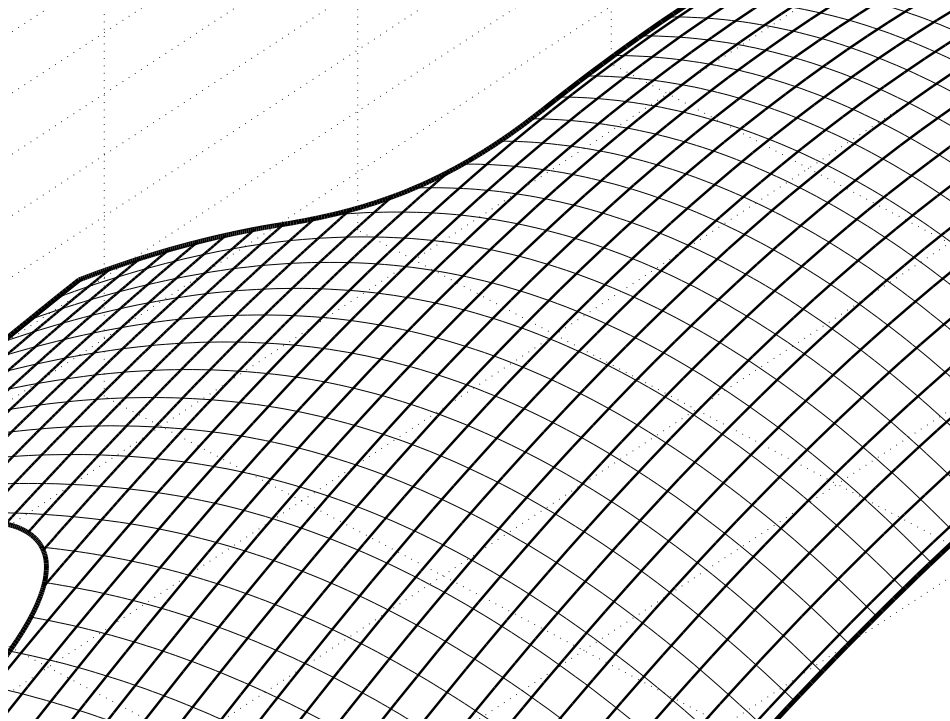
Scattered Data:



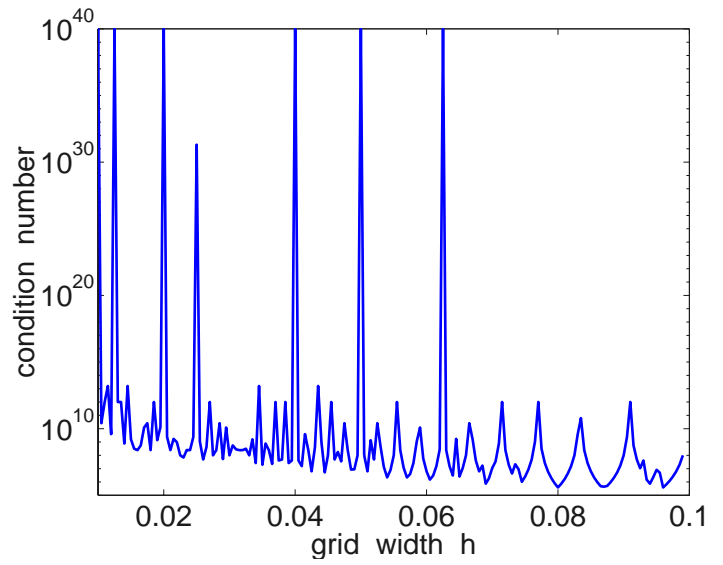
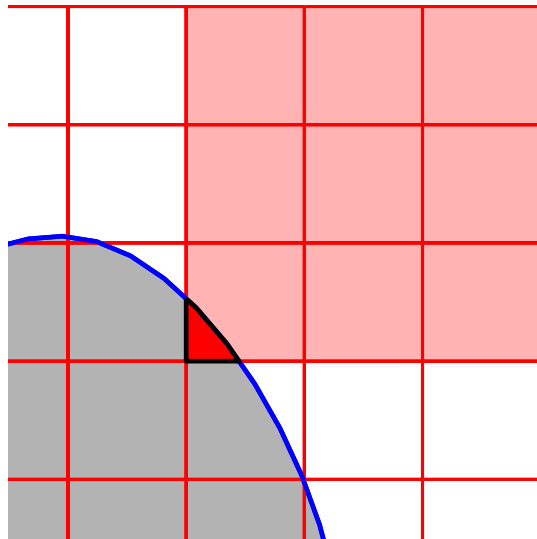
Approximation mit B-Splines:



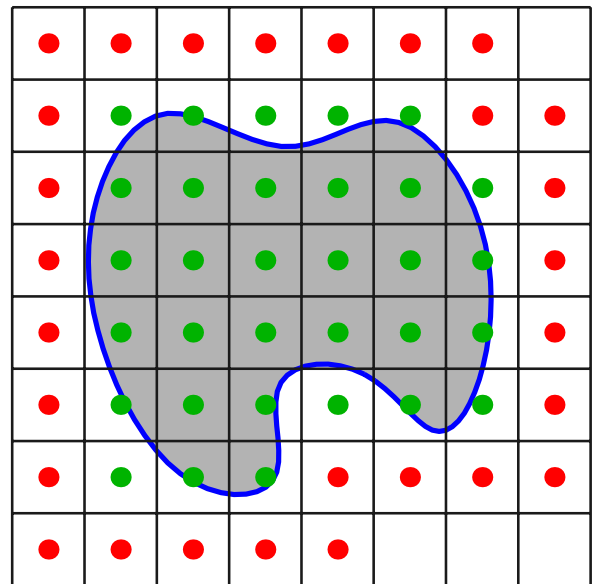
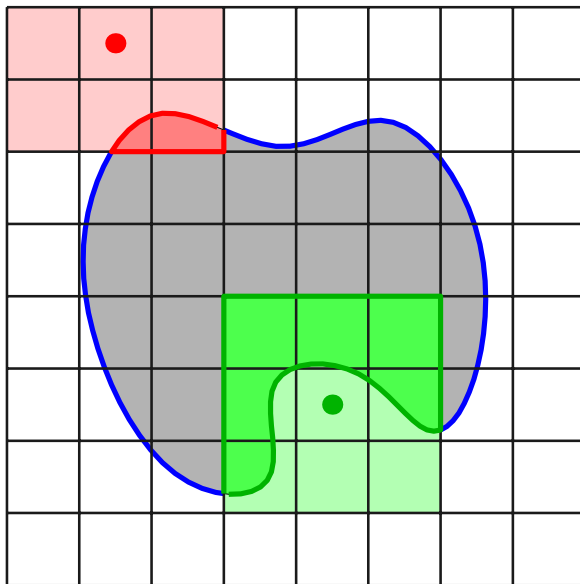
Approximation mit EB-Splines:



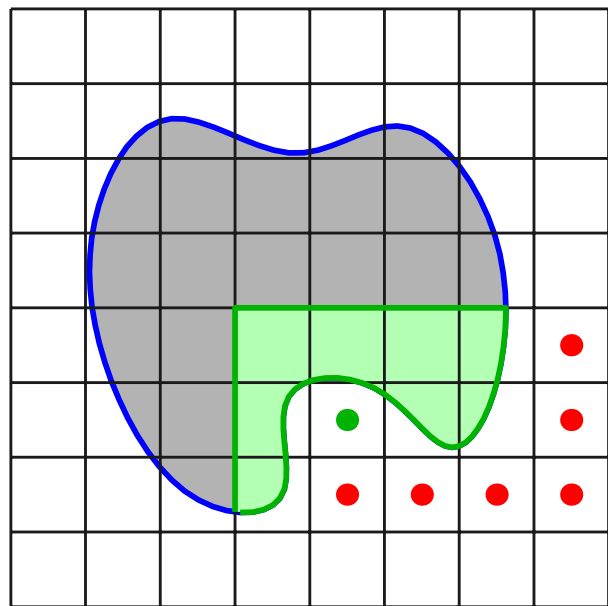
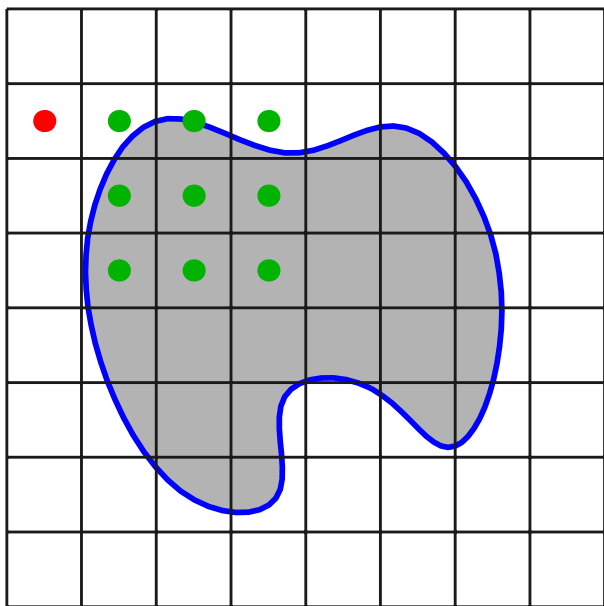
Instabilität am Rand:



Innere und äußere B-Splines:



Erweiterung – Bereich:



Erweiterung – Gewichte:

